

惯性导航原理与组合导航课程讲义

Part 4 - 惯性导航姿态算法

牛小骥 陈起金* 编写

武汉大学卫星导航定位技术研究中心

2021 年 5 月



*邮箱: chengqijin@whu.edu.cn; 微信/QQ: 815577966

目 录

1	欧拉角法	1
1.1	欧拉角组	1
1.2	导航姿态角的定义	2
1.3	用欧拉角表示旋转矩阵	3
1.4	姿态角微分方程	4
1.5	欧拉角在应用中的问题	4
2	旋转矩阵/方向余弦矩阵	6
2.1	方向余弦矩阵	6
2.2	方向余弦矩阵的特点	7
2.3	方向余弦矩阵微分方程	8
2.3.1	根据导数定义推导	8
2.3.2	根据向量坐标变换进行推导	9
2.4	微分方程的求解	9
2.5	可交换性条件的物理含义	11
3	四元数	14
3.1	四元数的基本概念	14
3.2	四元数的基本运算	15
3.3	四元数的三角表示法	17
3.4	四元数的旋转变换/算子	18
3.5	姿态四元数	19
3.6	四元数的微分方程	20
3.7	四元数微分方程的求解	22
4	等效旋转矢量	24
4.1	转动的不可交换性	24
4.2	等效旋转矢量的微分方程	26
4.3	等效旋转矢量微分方程求解	28
4.3.1	等效旋转矢量微分方程的工程近似	29
4.3.2	求解等效旋转矢量微分方程	30
5	姿态更新算法示例	32

引言

惯性导航系统 (Inertial navigation System, INS) 是一个自主的、完备的三维航位推算系统。对于平台式惯导, 陀螺稳定平台这一机电结构的存在使得加速度计的物理安装轴线始终跟踪并对齐当地地理坐标系的东向、北向和垂向, 这样只需对三个加速度计的测量值按时间做一次和两次积分即可得到载体的速度和位置。我们课程关心捷联惯性导航系统, 即惯性传感器 (陀螺和加速度计) 直接与载体绑定固联, 加速度计的安装轴线不再时刻跟踪当地地理坐标系了。因此, 在做捷联惯性导航计算时要时刻计算出载体相对于参考坐标系 (如当地水平坐标系) 坐标轴的相对空间朝向关系, 即载体的姿态; 从而将加速度计的比力测量值投影变换到参考坐标下, 然后, 再对其参考系下的比力投影分量进行积分运算解得载体的速度和位置。这就是完整的捷联惯性导航解算过程, 其中载体姿态、速度和位置三组参数的解算过程分别称之为捷联惯性导航的姿态更新、速度更新和位置更新。由此可见, 在捷联惯性导航解算中, 求解载体的姿态有两个重要的作用, 一是输出载体的姿态这一重要导航参数, 二是用于实现加速度计比力测量值的坐标变换。姿态更新算法是捷联惯性导航算法的核心, 对整个系统的解算精度影响最为突出, 其作用至关重要。

我们使用向量可以很方便地描述三维空间中载体的速度和位置, 但是要描述载体的姿态则没有那么容易。例如, 我们可以说“飞机机头北偏东 30° , 机头相对当地水平面抬升 5° ”这样的话来描述飞机的姿态。但是这种自然语言描述起来比较繁琐, 我们希望用一种像向量这样简洁的数学语言来描述它, 这种描述姿态的数学语言我们称之为**姿态表达式**。我们将介绍四种常用的姿态表达式, 包括欧拉角、方向余弦矩阵、四元数和等效旋转矢量。为什么要介绍多种姿态表达式呢, 能只学一种吗? 当然可以, 但是后续我们会发现, 这四种姿态表达式各有优缺点, 综合使用更加方便。例如, 用欧拉角描述载体的空间轴向非常直观, 但它却无法用于全姿态导航解算, 并且要实现比力测量值的坐标变换, 须转换成对应的方向余弦矩阵或四元数; 方向余弦矩阵用于实现向量的投影变换非常方便, 但是通过求解方向余弦矩阵或四元数的微分方程来实现姿态解算时都会不可避免地遇到“不可交换性误差”, 而这个问题却可以通过使用等效旋转矢量从理论上得到完美的解决。因此, 在实际惯性导航应用中, 我们往往会灵活选用多种不同的姿态表达式, 取长补短。

当载体运动时, 其姿态也随时间变化, 那么我们如何描述姿态的变化规律呢? 在实际工程应用中, 我们又怎样实现载体姿态的递推计算? 这些问题将在本讲义中得到解答, 我们常用姿态表达式的时间导数或叫微分方程来描述载体姿态随时间的变化规律, 然后通过求解这个微分方程得到载体姿态的递推计算式, 从而可编程实现载体姿态的更新计算。所以接下来我们将按如下的逻辑来介绍四种姿态表达式: 首先给出姿态表达式的定义, 然后推导其微分方程, 最后求解微分方程得到姿态更新表达式。在本讲义末尾, 我们给出了一个综合使用了多种姿态表达式的惯性导航姿态更新算法示例, 以帮助大家从前面繁重的公式推导中抽身出来, 避免“只见树木不见森林”。

1 欧拉角法

一个直角坐标系相对于另一个直角坐标系的方位关系，可通过三个依次转动来描述，每次旋转所绕的坐标轴与前后旋转轴正交。欧拉证明任意两个正交坐标系之间的相对朝向关系可以通过一组不少于 3 的角度来描述，这三次旋转的转角称为一组欧拉角，最早由欧拉（Leonhard Euler）提出而得名。欧拉角是一种用于描述两个坐标系之间相对姿态的经典方法，物理含义直观，易于理解，尤其是用于描述载体坐标系相对于当地导航坐标系的运动。

1.1 欧拉角组

图 1 是一个用欧拉角组¹表示两个坐标系间转动关系的示例：对直角坐标系 β 施以下三次转动，使其最终与坐标系 α 对齐。

1. 坐标系 β ($ox^\beta y^\beta z^\beta$)，绕其 z 轴正方向转动角度 ψ ，得到第一过渡坐标系 $ox^\psi y^\psi z^\psi$ ， β 与第一过渡坐标系具有共同的 z 轴，即 $z^\beta = z^\psi$ 。
2. 第一过渡坐标系 $ox^\psi y^\psi z^\psi$ 绕其 y^ψ 轴正方向转动角度 θ ，得到第二过渡坐标系 $ox^\theta y^\theta z^\theta$ ，两个过渡坐标系具有共同的 y 轴，即 $y^\theta = y^\psi$ 。本次转动的坐标轴 y^ψ 与第一次转动的旋转轴 z^ψ 垂直。
3. 第二过渡坐标系 $ox^\theta y^\theta z^\theta$ 绕其 x^θ 轴正方向转动角度 ϕ ，得到坐标系 α ($ox^\alpha y^\alpha z^\alpha$)。本次转动的坐标轴 x^θ 与第二次转动的旋转轴 y^θ 垂直。

上述转轴顺序可简记为“ZYX”，即表示依次绕初始坐标系 z 轴，第一过渡坐标系 y 轴和第二过渡坐标系的 x 轴旋转，一些文献中也用数字的形式记作“321”，即用 1, 2 和 3 分别表示 x , y 和 z 轴的转动。在给定一组欧拉角表示两个坐标系间的姿态关系时，一定要同时指定对应的转轴顺序才有意义。因为两个坐标系之间的相对关系可以通过多种不同的等价转动来描述，这涉及到转动轴和转轴顺序的选择等。我们可以根据需要进行不同的欧拉角组来实现同样的坐标系转动变换。例如针对两个右手直角坐标系，第一次转动，可以绕三个轴中的任一个转动，故有 3 种选择，第二次转动，则可以绕其它两个轴中的任一个转动，所以又有 2 种可能性，第三次转动，又可以绕另外两根轴的任一个转动（注意，相邻两次转动的旋转轴不同即可），又有两种可能性。因此，可供选择的欧拉角组共有 $N = 3 \times 2 \times 2 = 12$ 种，其排列组合包括‘ZYX’，‘YZX’，‘ZXY’，‘YXZ’，‘XZY’，‘XYZ’，‘ZYX’，‘YZX’，‘ZXY’，‘YXZ’，‘XZY’，‘XYZ’。注意：在我们的课程和讲义中，除非特别说明，默认使用“ZYX(321)”形式的欧拉角组。

关于这一问题可阅读参考文献 [4] 进行更深入的学习。也可使用 MATLAB 软件²自带的函数做一些欧拉角与其它姿态表达式转换，通过实际练习来加深对这一问题的理解。例如 MATLAB 自带的函数 `angle2dcm` 可根据给定的欧拉角计算对应方向余弦矩阵（将在下一小节介绍），使用语法为“`dcm = angle2dcm(yaw, pitch, roll, 'ZYX')`”，在给定欧拉角的同时必须指定对应的转轴顺序。

```
1      yaw = 0.7854;    pitch = 0.1;    roll = 0;    % 给定三个欧拉角，单位rad
2      dcm1 = angle2dcm(yaw, pitch, roll, 'zyx');    % 按ZYX(321)形式定义的欧拉角
3      dcm2 = angle2dcm(yaw, pitch, roll, 'zyz');    % 按ZYX(323)形式定义的欧拉角
4      % 比较 dcm1 与 dcm2 的差异
```

¹欧拉角组即一组欧拉角的意思，后续为描述方便，将简写为欧拉角。

²注意，需安装 MATLAB 2018 或更新的版本，并安装 Aerospace Toolbox。

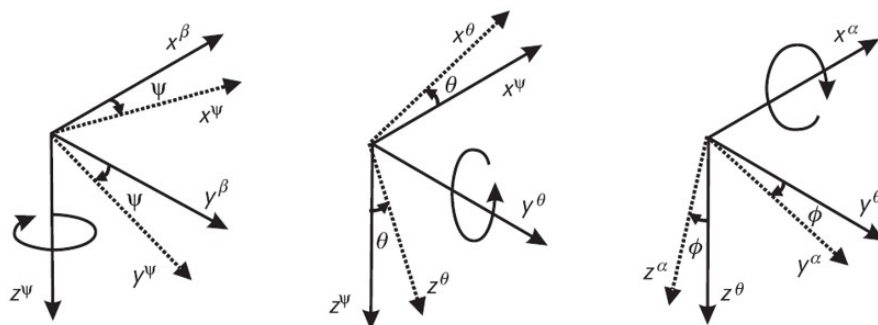


图 1: 三次欧拉角的转动

1.2 导航姿态角的定义

如前面所述，两个坐标系之间的方位关系可以用多组不同的欧拉角来描述，这些选择都是等价的。也即首先指定一个参考坐标系，然后用一组欧拉角来描述与载体（如地面车辆和飞机等）固联的坐标系相对于参考坐标系的空间指向。在地球附近的导航应用中，参考坐标系一般默认选择当地地理坐标系，而动坐标系为与运载体固联的坐标系。与载体固联的三轴通常称为纵轴、横轴和立轴，它们在物理上具有明确的含义，是绝大多数运动和控制的参考基准。只有明确定义了载体的坐标轴之后讨论其导航姿态角才有意义。以地面车辆这一载体为例，纵轴沿车辆前后方向，取前向为正；横轴沿车辆左右方向，取向右为正；立轴沿车辆上下方向，取向下为正。描述载体的一组欧拉角通常也称为姿态角，包括航向角、俯仰角和横滚角，各角的定义与载体的物理轴向紧密关联。在导航应用中采用以下约定方式定义导航姿态角：

- (1) 航向角：载体纵轴正方向在当地水平面上的投影与当地地理北向的夹角，常取北偏东为正，一般用 ψ 表示，角度范围为 $0 \sim 360^\circ$ 或 $-180^\circ \sim +180^\circ$ 。
- (2) 俯仰角：载体纵轴正方向与其水平投影线之间的夹角，当载体“抬头”时定义为正，一般用 θ 表示，取值范围为 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 。
- (3) 横滚角：载体立轴正方向与载体纵轴所在铅垂面之间的夹角，当载体向右倾斜（如飞机右机翼下压）时为正，用 ϕ 表示，取值范围为 $-180^\circ \sim +180^\circ$ 。

从上述定义可以看出，导航姿态角与载体的物理轴向紧密关联，而与载体坐标系（b 系）的具体选择没有关系。这句话怎么理解呢？我们举个例子：对于地面车辆，只要我们定义好了车辆的纵轴、横轴和立轴就可以开始描述它的姿态了，而在导航解算中我们可以将 b 系定义为“右-前-上”或者“前-右-下”的数学形式，但是不管我们选择哪种 b 系的数学定义，车体的姿态都还是按照上面的姿态角约定方式定义的，也即与 b 系的选择无关。

在我们的课程和讲义中，当地地理坐标系和载体坐标系都给出了具体的数学定义，其中当地地理坐标系（n 系），也即导航坐标系的三轴分别指向北向、东向和地向，即“北-东-地（NED）”坐标系；载体坐标系（b 系）的三轴分别指向纵轴前向、横轴右向和立轴向下，即“前-右-下（FRD）”坐标系。针对这样定义的 n 系和 b 系，载体的姿态角定义则对应于“ZYX”或 321 形式的欧拉角组。即 n 系分别绕 z 轴旋转 ψ 、绕过渡 y 轴转动 θ 和过渡 x 轴转动 ϕ 后 b 系对齐。

在一些文献中，“姿态”只用于特指横滚角和俯仰角，而不包含航向角，因此他们称上述欧拉角组为姿态和航向。在我们的讲义中，说到“姿态”则默认包含了横滚、俯仰和航向三个分量。

练习题：根据姿态角的定义，横滚、俯仰和航向看似三个分离的角度，尝试证明他们与三次转动对应的欧拉角本质上是相同的三个角度。

1.3 用欧拉角表示旋转矩阵

欧拉角也可以用来表示任意三维向量 $\mathbf{v}$ 在不同坐标系间的投影变换，但是要先转成相应的姿态矩阵。接下来，我们讨论如何根据欧拉角计算对应的坐标转换矩阵，也称姿态矩阵或方向余弦矩阵（将在下小节给出定义）。不失一般性，我们以 n 系和 b 系为例进行说明，以 n 系为参考系，而 b 系为动坐标系。向量 $\mathbf{v}$ 在 n 系和 b 系的坐标分别记作 $\mathbf{v}^n = [x^n \ y^n \ z^n]^T$ 和 $\mathbf{v}^b = [x^b \ y^b \ z^b]^T$ 。

在初始时刻，假定坐标系 b_0 与 n 系重合，第一次转动是 b_0 绕其 z 轴（即 n 系的 z 轴）转动 ψ 角。此时 b_0 转到 b' 的位置，向量 $\mathbf{v}$ 在 b' 与 n 系之间的投影变换关系为

$$\begin{bmatrix} x^{b'} \\ y^{b'} \\ z^{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix} \quad (1)$$

第二次转动， b' 系统绕其 y 轴转动 θ 角。此时 b' 转到 b'' 的位置，向量 $\mathbf{v}$ 在 b' 与 b'' 系之间的投影变换关系为

$$\begin{bmatrix} x^{b''} \\ y^{b''} \\ z^{b''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{b'} \\ y^{b'} \\ z^{b'} \end{bmatrix} \quad (2)$$

第三次转动， b'' 系统绕其 x 轴转动 ϕ 角。此时 b'' 转到 b 的位置，向量 $\mathbf{v}$ 在 b'' 与 b 系之间的投影变换关系为

$$\begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{b''} \\ y^{b''} \\ z^{b''} \end{bmatrix} \quad (3)$$

将式(1)代入(2)，再代入(3)，可得向量 $\mathbf{v}$ 的投影从 n 到 b 系之间的变换关系为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

式中，为书写方便采用了如下简写： $c\psi = \cos(\psi)$, $s\psi = \sin(\psi)$, $\psi = \phi, \theta, \psi$ 。将上式写成矩阵形式，有

$$\mathbf{v}^b = \mathbf{C}_{\text{NED}}^{\text{FRD}}(\psi, \theta, \phi) \mathbf{v}^n \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{C}_{\text{NED}}^{\text{FRD}}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{C}_{\text{NED}}^{\text{FRD}}(\psi, \theta, \phi)$ 即姿态矩阵。它是由三次转动的变换矩阵连乘得到。我们在式中明确写出

了参考系和动坐标系的数学定义（即 NED 和 FRD），并明确给出了转动顺序 $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$ 。后面为了书写的简洁，在不引起歧义的情况下，我们将其简写为 $\mathbf{C}_n^b$ 。

练习题：将 IMU 在 0 时刻和 t 时刻的坐标系分别记为 $b(0)$ 系和 $b(t)$ 系，陀螺在 $[0, t]$ 时段内输出的角增量记为 $\Delta\theta = [\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z]^T$ ，可将角增量看做是两个坐标系的相对欧拉角，并忽略测量误差，根据上面欧拉角与姿态矩阵的转换关系，尝试写出 $\mathbf{C}_{b(0)}^{b(t)}$ 及其转置 $(\mathbf{C}_{b(0)}^{b(t)})^T$ 的表达式。进一步假设 $\Delta\theta$ 的三个分量均为小角度，写出两个矩阵的近似表达式。

1.4 姿态角微分方程

假设姿态角 ϕ , θ 和 ψ 都是时间的函数，式(6)两边对时间求导，其结果与2.3.2节的方向余弦矩阵微分方程 $\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\omega_{nb}^b \times)$ 对比，可得欧拉角的微分方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nb,x}^b \\ \omega_{nb,y}^b \\ \omega_{nb,z}^b \end{bmatrix} \quad (7)$$

上述微分方程组的详细推导可参考 [1, p.248] 或 [3, p.3-57]。理论上求解这个微分方程组就可以得到三个欧拉角，实现姿态角的递推计算。但是，从上式可以看出欧拉角微分方程是一组强非线性微分方程，即微分方程的系数中（上式等号右边的第一个矩阵）包含了大量姿态角的三角函数。一般情况下，很难求解得到上述微分方程组的解析解，工程应用中通过数值积分的方法得到其近似解。另外，微分方程的系数分母中含有 $\cos\theta$ ，在 $\theta = \pm 90^\circ$ 附近无法通过角速度进行欧拉角的数值求解。因此， $\theta = \pm 90^\circ$ 是“N-E-D, 321”形式欧拉角的奇异点。因为存在这一问题，在导航应用中姿态解算很少使用欧拉角法，在航天飞行器姿态控制的特定应用中会选择求解上述微分方程的方式进行姿态计算，有兴趣的读者可阅读文献 [5]。

1.5 欧拉角在应用中的问题

欧拉角具有物理含义直观，易于理解的优点，在导航应用中常被用于描述惯性测量单元（IMU）或载体的姿态。另外，根据欧拉角组计算得到的姿态矩阵，式(6)，永远是正交阵，用这个矩阵进行加速度信息的坐标变换时，变换后的信息中不存在非正交误差。因此，用欧拉角法得到的姿态矩阵无需进行正交化处理。

然而，欧拉角有一个重大缺点是当俯仰角为 $\pm 90^\circ$ 时，欧拉角变换存在奇异值，此时无法区分横滚角和航向角。因为当俯仰角为 90° 时，飞机的纵轴与地理北向垂直，而当飞机绕其 z 轴转动时，飞机的纵轴与当地北向的夹角式中保持垂直，即此时无法区分航向角和横滚角。这有点类似于我们在北极点时无法再区分北向和东向一样。因此，由于存在上述问题，欧拉角法不能用于全姿态飞行器上。这一现象还可从以下角度进行描述。

- 方程式的退化问题。如前面所述，当俯仰角 $\theta = \pm 90^\circ$ 时，无法根据角速度测量值求解欧拉角微分方程，进行姿态更新，因为此时分母中的 $\cos \theta = 0$ ，这也被称为奇异性问题。
- 著名的万向锁问题（Gimbal Lock）。在俯仰角为 $\pm 90^\circ$ 时，第一次旋转与第三次旋转的旋转轴共线，使得系统丢失了一个自由度（由 3 次旋转变成了 2 次旋转），相应于平台式系统导航平台的锁定。

在使用欧拉角组来表达姿态时，应注意以下两个问题，即欧拉角组不能直接加减，欧拉角组不能线性内插。

(1) 欧拉角组不能直接加减。在实际导航应用中，我们常将一个欧拉角组的三个角度写成三维向量的形式，如 $Euler_{NED-FRD} = (\phi \ \theta \ \psi)$ ，或者

$$Euler_{NED-FRD} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

在此再次强调，上面的欧拉角组表示的是 NED n 系与 FRD b 系之间按 ZYX 顺序定义的欧拉角，只是书写时将三个角度按转动的倒序排列，在实际使用时要特别注意。上面欧拉角组的三个角度虽然具有三维向量的形式，但却不具有三维向量的性质。因为，我们不能将连续的任意两次旋转简单地表示为两组欧拉角相加。

如何理解上面这句话，我们举个例子：在评估组合导航系统姿态精度的时候，需要对比待测系统与参考系统的姿态来得到待测系统的姿态误差序列。一般情况下，不能将两个系统的欧拉角序列直接相减（这也是初学者非常容易犯的错误），正确的做法，应该是得到两个 IMU 姿态结果的方向余弦矩阵，然后再将其转换成欧拉角。

$$\mathbf{C}_{b_1}^{b_2} = \mathbf{C}_n^{b_2} \mathbf{C}_{b_1}^n \quad (8)$$

然后，根据矩阵 $\mathbf{C}_{b_1}^{b_2}$ 反算出对应的欧拉角序列，即待测系统的姿态误差序列。只有当待测系统与参考系统大致对齐，只存在小角度偏差时，用欧拉角直接相减，将近似等于上面公式的计算结果。

(2) 欧拉角组不能内插。例如 $0.5 Euler_{NED-FRD} = 0.5 (\phi \ \theta \ \psi)$ ，不能表达“转动一半”的物理含义。

要点回顾

欧拉角要点回顾

- 1 两个正交坐标系之间的相对朝向关系可以通过一组欧拉角组来描述，给定一组欧拉角须同时指定对应的转轴顺序，本讲义采用“ZYX”或“321”的转轴顺序。
- 2 导航姿态角，包括航向角、俯仰角和横滚角，与载体的物理轴向紧密关联，而与选择的载体数学坐标系无关。
- 3 当俯仰角为 $\pm 90^\circ$ 时，欧拉角变换存在奇异值，此时无法区分横滚角和航向角。因此，欧拉角法不能用于全姿态导航应用。
- 4 欧拉角组不能直接相加来表示两次转动的合成。

2 旋转矩阵/方向余弦矩阵

在惯性导航应用中，方向余弦矩阵（Direction Cosine Matrix, DCM）常用于描述两个坐标系的相对姿态。相比于欧拉角，方向余弦矩阵显得抽象许多，但它用于处理向量的投影变换则非常方便。为了更好地理解方向余弦矩阵如何表示姿态，我们先回顾一下向量和向量的坐标变换等基本概念。向量可以看成是从空间中某个点指向另一点的一个箭头。一个向量是空间中的一样东西，是客观存在的。注意不要把向量与它的坐标这两个概念混淆，比如一个三维向量 $\mathbf{v}$ 并不是必须和三个实数相关联。只有当我们指定了三维空间的某个坐标系时，讨论该向量在此坐标系下的坐标才有意义，也就是找到三个实数与这个向量对应。同一个向量在不同的坐标系下会有不同的坐标，即向量在不同坐标系下的投影不一样，实现向量在不同坐标系下的投影变换是方向余弦矩阵的重要功能。

2.1 方向余弦矩阵

方向余弦矩阵是用向量的方向余弦来表示的姿态矩阵。我们把三维空间中的任一直角坐标系 α 的 x, y, z 三个轴上的单位向量分别记为 $\mathbf{i}^\alpha = [1 \ 0 \ 0]^\text{T}$, $\mathbf{j}^\alpha = [0 \ 1 \ 0]^\text{T}$, $\mathbf{k}^\alpha = [0 \ 0 \ 1]^\text{T}$ 。任意三维向量 $\mathbf{v}$ 在 α 系下有一个坐标 (v_1, v_2, v_3) 。那么向量 $\mathbf{v}$ 在坐标系 α 轴向上的分量形式可写作

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

同理，将另一直角坐标系 β 的 x, y, z 三个轴上的单位向量分别记为 $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ ，同一个向量 $\mathbf{v}$ 在 β 系轴向上的分量形式可写作

$$\mathbf{v} = v'_1 \mathbf{I} + v'_2 \mathbf{J} + v'_3 \mathbf{K} = [\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中 (v'_1, v'_2, v'_3) 为向量 $\mathbf{v}$ 在 β 系下的坐标，记作向量形式 $\mathbf{v}^\beta = [v'_1 \ v'_2 \ v'_3]^\text{T}$ 。根据式(9)和(10)，有

$$[\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

上式两边同时左乘矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{I}^\text{T} \\ \mathbf{J}^\text{T} \\ \mathbf{K}^\text{T} \end{bmatrix}$ ，可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}^\text{T} \mathbf{I} & \mathbf{I}^\text{T} \mathbf{J} & \mathbf{I}^\text{T} \mathbf{K} \\ \mathbf{J}^\text{T} \mathbf{I} & \mathbf{J}^\text{T} \mathbf{J} & \mathbf{J}^\text{T} \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^\text{T} \mathbf{I} & \mathbf{K}^\text{T} \mathbf{J} & \mathbf{K}^\text{T} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^\text{T} \mathbf{i} & \mathbf{I}^\text{T} \mathbf{j} & \mathbf{I}^\text{T} \mathbf{k} \\ \mathbf{J}^\text{T} \mathbf{i} & \mathbf{J}^\text{T} \mathbf{j} & \mathbf{J}^\text{T} \mathbf{k} \\ \mathbf{K}^\text{T} \mathbf{i} & \mathbf{K}^\text{T} \mathbf{j} & \mathbf{K}^\text{T} \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中上标 T 表示矩阵的转置。因为 $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{K}$ 是 n 系坐标轴上的单位向量，两两正交。所以有

$$\begin{cases} \mathbf{I}^T \mathbf{I} = 1 & \mathbf{I}^T \mathbf{J} = 0 & \mathbf{I}^T \mathbf{K} = 0 \\ \mathbf{J}^T \mathbf{I} = 0 & \mathbf{J}^T \mathbf{J} = 1 & \mathbf{J}^T \mathbf{K} = 0 \\ \mathbf{K}^T \mathbf{I} = 0 & \mathbf{K}^T \mathbf{J} = 0 & \mathbf{K}^T \mathbf{K} = 1 \end{cases} \quad (13)$$

将上式带入(12)，得

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^T \mathbf{i} & \mathbf{I}^T \mathbf{j} & \mathbf{I}^T \mathbf{k} \\ \mathbf{J}^T \mathbf{i} & \mathbf{J}^T \mathbf{j} & \mathbf{J}^T \mathbf{k} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{i} & \mathbf{K}^T \mathbf{j} & \mathbf{K}^T \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

上式可写作，

$$\mathbf{v}^\beta = \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha \quad (15)$$

其中， $\mathbf{C}_\alpha^\beta$ 是一个 3×3 的矩阵

$$\mathbf{C}_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^T \mathbf{i} & \mathbf{I}^T \mathbf{j} & \mathbf{I}^T \mathbf{k} \\ \mathbf{J}^T \mathbf{i} & \mathbf{J}^T \mathbf{j} & \mathbf{J}^T \mathbf{k} \\ \mathbf{K}^T \mathbf{i} & \mathbf{K}^T \mathbf{j} & \mathbf{K}^T \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (16)$$

上述矩阵中的每个元素都是两个单位向量的内积。例如，式中 $\mathbf{I}^T \mathbf{i}$ 是 β 系 x 轴上单位向量与 α 系 x 轴上单位向量的内积。根据向量内积的定义有，

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{I}^T \mathbf{i} = \|\mathbf{I}\| \|\mathbf{i}\| \cos \langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle \\ &= \cos \langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle$ 是向量 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{i}$ 的夹角， $\cos \langle \mathbf{I}, \mathbf{i} \rangle$ 为两个向量的方向余弦值。因为单位向量的长度为 1，所以式(16)中 $\mathbf{C}_\alpha^\beta$ 矩阵的每个元素都是两个单位向量的方向余弦值，所以该矩阵又被称作方向余弦矩阵。 $\mathbf{C}_\alpha^\beta$ 可以将三维向量在 α 系下的投影变换到 β 系下的投影，实现了两个坐标系下的坐标变换。

在我们的课程和讲义中，将用带上下标的加粗大写字母 $\mathbf{C}$ 来表示方向余弦矩阵，并明确指定其上下标的含义： $\mathbf{C}_\alpha^\beta$ 表示从 α 系到 β 系的坐标变换矩阵，或者说该矩阵可以将任意三维向量在 α 系下的坐标变换为 β 系下的坐标。

2.2 方向余弦矩阵的特点

方向余弦矩阵有一些特别的性质。首先，它是一个正交矩阵，即该矩阵的逆等于它的转置

$$(\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{-1} = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^T \quad (18a)$$

$$\mathbf{C}_\alpha^\beta (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^T = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^T \mathbf{C}_\alpha^\beta = \mathbf{I} \quad (18b)$$

$$\mathbf{C}_\beta^\alpha = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^T \quad (18c)$$

式中 $\mathbf{I}$ 是 3×3 的单位矩阵。上述性质很容易直接从方向余弦矩阵的定义证明得到。另外，方向余弦矩阵的行列式为 1，即

$$\det(\mathbf{C}_\alpha^\beta) = 1 \quad (19)$$

方向余弦矩阵满足矩阵的连乘法则，即多次连续转动可以用相应的多个方向余弦矩阵连乘来表示。

$$\mathbf{C}_a^d = \mathbf{C}_b^d \mathbf{C}_a^b \quad (20)$$

这一性质在后面姿态更新算法中频繁用到。

2.3 方向余弦矩阵微分方程

方向余弦矩阵可表示两个坐标系的相对姿态关系，一般我们指定其中一个为参考坐标系，用 R 表示，另一个为载体坐标系，用 b 来表示。当载体运动时，两个坐标系之间的相对姿态随时间变化，对应的方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^R(t)$ 则是一个时变矩阵。将 b 系相对于 R 系的转动角速度记为 $\boldsymbol{\omega}_{Rb}(t)$ ，它也是一个时变的角速度向量。后面为了书写方便将不明确写出时间变量 t 。接下来，我们将给出两种方向余弦矩阵微分方程的推导过程，其中一种是直接根据导数的定义推导得到，另一种是对向量的坐标变化式进行求导得到。

2.3.1 根据导数定义推导

根据矩阵导数的定义，有

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_b^R(t + \Delta t) - \mathbf{C}_b^R(t)}{\Delta t} \quad (21)$$

式中， $\mathbf{C}_b^R(t)$ 和 $\mathbf{C}_b^R(t + \Delta t)$ 分别为 t 和 $t + \Delta t$ 时刻的方向余弦矩阵。根据方向余弦矩阵的连乘法，有

$$\mathbf{C}_b^R(t + \Delta t) = \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^R = \mathbf{C}_{b(t)}^R \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)} \quad (22)$$

式中，矩阵 $\mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$ 可将向量坐标从 $b(t + \Delta t)$ 系变换到 $b(t)$ 系。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $b(t + \Delta t)$ 系与 $b(t)$ 系之间的相对姿态角为小角度，记为 $\Delta \boldsymbol{\theta} = [\Delta \theta_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z]^T$ ，根据欧拉角与方向余弦矩阵的转换关系式，在小角度假设下有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)} = \mathbf{I} + (\Delta \boldsymbol{\theta} \times) \quad (23)$$

式中 $(\Delta \boldsymbol{\theta} \times)$ 是 $\Delta \boldsymbol{\theta}$ 对应的反对称矩阵

$$(\Delta \boldsymbol{\theta} \times) = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta \theta_z & \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z & 0 & -\Delta \theta_x \\ -\Delta \theta_y & \Delta \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

根据角速度向量的定义有

$$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \quad (25)$$

将(23)带入(22)，其结果再带入(21)，整理得

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_{b(t)}^R (\Delta \boldsymbol{\theta} \times)}{\Delta t} \quad (26)$$

将(25)带入上式，可得

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R(t) = \mathbf{C}_{b(t)}^R (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t) \times) \quad (27)$$

为书写方便，常省略时间变量 t ，则矩阵微分方程式可写作

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R = \mathbf{C}_b^R (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times) \quad (28)$$

当我们指定导航坐标系（ n 系，也即当地水平坐标系）为参考系时，则有

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \quad (29)$$

2.3.2 根据向量坐标变换进行推导

假设在 R 系下有任何一个固定向量 $\mathbf{r}$ ，根据 Coriolis 定理（简称哥氏定理），该向量在 R 系和 b 系下有如下导数变换关系：

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{Rb} \times \mathbf{r} \quad (30)$$

因为向量 $\mathbf{r}$ 在 R 系中固定不动，故

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_R = \mathbf{0} \quad (31)$$

将上式代入(30)，整理可得

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b = -\boldsymbol{\omega}_{Rb} \times \mathbf{r} \quad (32)$$

将上式等号两边的向量投影到 b 系，有

$$\dot{\mathbf{r}}^b \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_b^b = -\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times \mathbf{r}^b \quad (33)$$

另一方面，向量 $\mathbf{r}$ 在 R 系和 b 系下的坐标变换关系式为

$$\mathbf{r}^R = \mathbf{C}_b^R \mathbf{r}^b \quad (34)$$

对上式两边求导，可得

$$\dot{\mathbf{r}}^R = \dot{\mathbf{C}}_b^R \mathbf{r}^b + \mathbf{C}_b^R \dot{\mathbf{r}}^b \quad (35)$$

将式(33)代入上式，可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_b^R \mathbf{r}^b &= -\mathbf{C}_b^R \dot{\mathbf{r}}^b \\ &= \mathbf{C}_b^R (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times \mathbf{r}^b) \\ &= \mathbf{C}_b^R (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times) \mathbf{r}^b \end{aligned} \quad (36)$$

因为 $\mathbf{r}$ 为任意向量，故有

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R = \mathbf{C}_b^R (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times) \quad (37)$$

如果指定导航系 n 为参考系，则有

$$\dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \quad (38)$$

上式即方向余弦矩阵的微分方程式。

2.4 微分方程的求解

接下来我们讨论方向余弦矩阵微分方程的求解。为书写方便，我们暂时省略方向余弦矩阵的上下标，并记反对称矩阵 $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega} \times)$ ，则方向余弦矩阵的微分方程可写作

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Omega}(t) \quad (39)$$

这是一个典型的时变系数齐次微分方程，可采用迭代的方法求解，对迭代求解过程不感兴趣的读者可以直接跳转至该方程的闭合解表达式，即式(50)。

首先，对上式在时段 $[0, t]$ 上积分，可得

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) + \int_0^t \mathbf{C}(\tau) \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \quad (40)$$

式中 $\mathbf{C}(0)$ 为积分初值。由于上式右边第二项被积函数中仍含有待求的 $\mathbf{C}(t)$ ，重复使用上式右边整体带入积分号内。第一次代入，得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(0) + \int_0^t \left[\mathbf{C}(0) + \int_0^\tau \mathbf{C}(\tau_1) \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \right] \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{C}(0) + \mathbf{C}(0) \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{C}(\tau_1) \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{C}(0) \left[\mathbf{I} + \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \right] + \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{C}(\tau_1) \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

将上式右边整体再次代入(40)积分号内，即第二次代入，得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(0) + \int_0^t \left[\mathbf{C}(0) + \mathbf{C}(0) \int_0^\tau \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \mathbf{C}(\tau_2) \boldsymbol{\Omega}(\tau_2) d\tau_2 \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \right] \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{C}(0) \left[\mathbf{I} + \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \mathbf{C}(\tau_2) \boldsymbol{\Omega}(\tau_2) d\tau_2 \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

这样不断地进行代入，便得到

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(0) \left[\mathbf{I} + \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \boldsymbol{\Omega}(\tau_2) d\tau_2 \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau + \dots \right] \end{aligned} \quad (43)$$

上式是一个以无限重积分表示的级数，也被称为毕卡级数（Peano-Baker series）。上述级数是收敛的，但一般情况下得不到闭合形式的解，只有在“定轴转动”这一特殊情形下才容易得到闭合解。关于“定轴转动”的物理含义我们稍后详细解释，这一条件可用矩阵描述如下：考虑时段 $[0, T]$ ，转动角速度向量形成的反对称矩阵相乘满足以下可交换条件

$$\boldsymbol{\Omega}(t) \boldsymbol{\Omega}(\tau) = \boldsymbol{\Omega}(\tau) \boldsymbol{\Omega}(t), \quad t, \tau \in [0, T] \quad (44)$$

根据上式，有

$$\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(t) \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau = \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) \boldsymbol{\Omega}(t) d\tau \quad (45)$$

注意，上述积分号内变量 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 与积分上限相同，所以在积分区间 $[0, t]$ 内是常量，故有

$$\boldsymbol{\Omega}(t) \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau = \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \boldsymbol{\Omega}(t) \quad (46)$$

计算以下微分式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \right]^2 &= \frac{d}{dt} \left\{ \left[\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \right] \left[\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \right] \right\} \\ &= \boldsymbol{\Omega}(t) \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \boldsymbol{\Omega}(t) \\ &= 2 \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau \boldsymbol{\Omega}(t) \end{aligned} \quad (47)$$

注意，上式最后一个等号是在满足式(44)的条件下才成立，对上式两边求积分，假定 $\mathbf{\Omega}(0) = \mathbf{0}$ ，有

$$\int_0^t \int_0^\tau \mathbf{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^2 \quad (48)$$

同理，有

$$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^{\tau_1} \mathbf{\Omega}(\tau_2) d\tau_2 \mathbf{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{2} \left[\int_0^\tau \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^2 \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau = \frac{1}{6} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^3 \quad (49)$$

以此类推，在满足“定轴转动”条件下，上述毕卡级数可得到如下的闭合解形式

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(0) \left\{ \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right]^3 + \dots \right\} \\ &= \mathbf{C}(0) \exp \left(\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (50)$$

或写作

$$\mathbf{C}(t + \Delta t) = \mathbf{C}(t) \exp \left(\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right) \quad (51)$$

针对时段 $[0, t]$ ，记角增量 $\boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b d\tau$ ，它的模记为 $\theta(t) = |\boldsymbol{\theta}(t)|$ 。根据反对称矩阵的指数函数式，有

$$\exp \left(\int_0^t \mathbf{\Omega}(\tau) d\tau \right) = e^{[\boldsymbol{\theta}(t) \times]} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta(t)}{\theta(t)} [\boldsymbol{\theta}(t) \times] + \frac{1 - \cos \theta(t)}{\theta^2(t)} [\boldsymbol{\theta}(t) \times]^2 \quad (52)$$

将式 (52) 带入 (50)，可得：

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(0) \mathbf{C}_t^0 \quad (53)$$

其中

$$\mathbf{C}_t^0 = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta(t)}{\theta(t)} [\boldsymbol{\theta}(t) \times] + \frac{1 - \cos \theta(t)}{\theta^2(t)} [\boldsymbol{\theta}(t) \times]^2 \quad (54)$$

注意，上式 $\mathbf{C}_t^0$ 的上下标表示时间。

当积分时间从 $[0, t]$ 改为 $[t_{k-1}, t_k]$ ，选择惯性系 i 为参考系，且假设已知 t_{k-1} 时刻的惯导姿态矩阵为 $\mathbf{C}_b^i(t_{k-1}) \equiv \mathbf{C}_{b(k-1)}^i$ 。此时，陀螺输出的角增量为 $\Delta \boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) dt$ ，它的模记为 $\Delta \theta_k = |\Delta \boldsymbol{\theta}_k|$ ，则求解 t_k 时刻的惯导姿态矩阵 $\mathbf{C}_{b(k)}^i$ 的公式为

$$\mathbf{C}_{b(k)}^i = \mathbf{C}_{b(k-1)}^i \mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (55)$$

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k} [\Delta \boldsymbol{\theta}_k \times] + \frac{1 - \cos \Delta \theta_k}{\Delta \theta_k^2} [\Delta \boldsymbol{\theta}_k \times]^2 \quad (56)$$

式(55)和(56)即姿态矩阵离散化更新的递推计算公式。值得注意的是，式(56)成立的前提是 b 系在 $[t_{k-1}, t_k]$ 必须为定轴转动。

2.5 可交换性条件的物理含义

一般情况下，矩阵的乘法不满足交换律，但是在前面的推导中，我们发现只有在满足式(44)的特定情况下才能得到姿态矩阵微分方程的解析解。这一特定条件又被称之为可交换性条件，接下来我们讨论

其物理含义。记角速度向量 $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_{1x}, \omega_{1y}, \omega_{1z}]^T$, $\boldsymbol{\omega}(\tau) = [\omega_{2x}, \omega_{2y}, \omega_{2z}]^T$, 则可写出 $\boldsymbol{\Omega}(t)\boldsymbol{\Omega}(\tau)$ 和 $\boldsymbol{\Omega}(\tau)\boldsymbol{\Omega}(t)$ 的具体表达式。

$$\boldsymbol{\Omega}(t)\boldsymbol{\Omega}(\tau) = [\boldsymbol{\omega}(t) \times][\boldsymbol{\omega}(\tau) \times] = \begin{bmatrix} -\omega_{1y}\omega_{2y} - \omega_{1z}\omega_{2z} & \omega_{1y}\omega_{2x} & \omega_{1z}\omega_{2x} \\ \omega_{1x}\omega_{2y} & -\omega_{1x}\omega_{2x} - \omega_{1z}\omega_{2z} & \omega_{1z}\omega_{2y} \\ \omega_{1x}\omega_{2z} & \omega_{1y}\omega_{2z} & -\omega_{1x}\omega_{2x} - \omega_{1y}\omega_{2y} \end{bmatrix} \quad (57a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\tau)\boldsymbol{\Omega}(t) = [\boldsymbol{\omega}(\tau) \times][\boldsymbol{\omega}(t) \times] = \begin{bmatrix} -\omega_{1y}\omega_{2y} - \omega_{1z}\omega_{2z} & \omega_{2y}\omega_{1x} & \omega_{2z}\omega_{1x} \\ \omega_{2x}\omega_{1y} & -\omega_{1x}\omega_{2x} - \omega_{1z}\omega_{2z} & \omega_{2z}\omega_{1y} \\ \omega_{2x}\omega_{1z} & \omega_{2y}\omega_{1z} & -\omega_{1x}\omega_{2x} - \omega_{1y}\omega_{2y} \end{bmatrix} \quad (57b)$$

要满足可交换性条件, 即要式(44)成立, 也即式(57a)与(57b)中矩阵各元素必须相等, 可解得

$$\begin{cases} \omega_{1x}\omega_{2y} = \omega_{2x}\omega_{1y} \\ \omega_{1x}\omega_{2z} = \omega_{2x}\omega_{1z} \\ \omega_{1y}\omega_{2z} = \omega_{2y}\omega_{1z} \end{cases} \quad (58)$$

接下来对上式的物理含义分情况进行讨论:

(1) 如果 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 和 $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ 的各分量都不为 0, 则有

$$\frac{\omega_{1x}}{\omega_{2x}} = \frac{\omega_{1y}}{\omega_{2y}} = \frac{\omega_{1z}}{\omega_{2z}} \quad (59)$$

上式也可以写成如下向量的形式:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = c\boldsymbol{\omega}(\tau) \quad (60)$$

上式说明角速度向量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 与 $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ 方向相同, 因为前面假设这两个角速度向量是 $[0, T]$ 时段内的任意两个时刻的角速度向量, 这样上式就意味着在时段 $[0, T]$ 内, b 系相对于参考系的转动角速度向量方向保持不变, 即载体或者 b 系做定轴转动。

(2) 如果角速度向量中的某些分量为 0。例如, 假设 $\omega_{1x} = 0, \omega_{1y} \neq 0, \omega_{1z} \neq 0$, 根据式(58)第一式可得 $\omega_{2x} = 0$, 同时根据第三式有

$$\frac{\omega_{2y}}{\omega_{1y}} = \frac{\omega_{2z}}{\omega_{1z}} \quad (61)$$

这种情况下 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 与 $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ 的方向仍然是相同的。同理, 当角速度向量中有两个分量为 0 时, 也能得出相同的结论。

(3) 当其中一个角速度为零向量时, 表示载体静止, 是定轴转动的一种特殊情况, 此时, 式(60)中的 $c = 0$ 。

综合上述三种情况, 姿态矩阵微分方程闭合解(50)存在的条件是载体在给定时段内做定轴转动。对于普通惯性导航应用来说, b 系定轴转动这一假设一般都不成立的, 当该条件不满足时, 仍然将陀螺输出的角增量套用到式(55)和(56)中进行姿态更新的递推计算, 则会带来姿态更新/求解的不可交换性误差。这一问题在后面求解四元数微分方程的时候也会遇到。解决这一问题一般有两种思路: 1) 提高惯性导航系统的原始数据采样率, 使得时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 尽可能短, 从而使得 b 系的角运动更逼近定轴转动。2) 用陀螺输出构造出一个等效的定轴旋转角度“向量”, 该向量的三个分量代表了定轴旋转的方向, 模代表了绕该轴转动的角度大小, 这就是后续要介绍的姿态的等效旋转矢量表示法。

要点回顾

方向余弦矩阵要点回顾

- 1 方向余弦矩阵是正交矩阵， $(\mathbf{C}_\alpha^\beta)^{-1} = (\mathbf{C}_\alpha^\beta)^T$ 。多次连续转动可以用相应的多个方向余弦矩阵连乘来表示： $\mathbf{C}_a^d = \mathbf{C}_b^d \mathbf{C}_a^b$ 。
- 2 当载体运动时，两个坐标系之间的相对姿态随时间变化，对应的方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^R(t)$ 则是一个时变矩阵，其微分方程为 $\dot{\mathbf{C}}_b^R = \mathbf{C}_b^R(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times)$ 。
- 3 可用毕卡迭代法求解方向余弦矩阵的微分方程，得到一个以无限重积分表示的级数，也被称为毕卡级数，上述级数是收敛的，但只有在“定轴转动”这一特殊情形下才能得到如下形式的闭合解： $\mathbf{C}_b^R(t) = \mathbf{C}(0)\exp\left(\int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau)d\tau\right)$ 。
- 4 姿态更新公式： $\mathbf{C}_{b(k)}^i = \mathbf{C}_{b(k-1)}^i \mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$ ， $\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \Delta\theta_k}{\Delta\theta_k} [\Delta\boldsymbol{\theta}_k \times] + \frac{1 - \cos \Delta\theta_k}{\Delta\theta_k^2} [\Delta\boldsymbol{\theta}_k \times]^2$ 。
- 5 对于普通惯性导航应用来说， b 系定轴转动这一假设一般都不成立的，当该条件不满足时，仍然将陀螺输出的角增量套用到式(55)和(56)中进行姿态更新的递推计算，则会带来姿态更新/求解的不可交换性误差。可用等效旋转矢量来解决这个问题。

3 四元数

回顾以前学习过的复数，它们可以看成复平面上的向量，例如复数 $z = \rho \cos \phi + i\rho \sin \phi$ 可看成在复平面上一个长度为 ρ ，与实轴夹角为 ϕ 的向量。应用欧拉公式，该复数还可以写成指数形式

$$z = \rho e^{i\phi} = \rho \cos \phi + i\rho \sin \phi \quad (62)$$

假设另有一个单位长度的复数 z_1

$$z_1 = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (63)$$

用复数 z_1 乘以 z ，有

$$z' = z_1 z = \rho e^{i(\phi+\theta)} \quad (64)$$

如图所示，对一个复数乘以单位复数 $e^{i\theta}$ 等效于将原复平面向量 z 旋转了一个角度 θ ，如图 2 所示。所以，对于二维复平面，旋转可以由单位复数来描述，类似的，对于三维空间的旋转可由超复数（也即四元数）来描述。

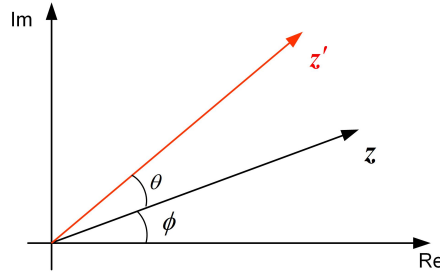


图 2: 乘以单位复数等效于复向量的旋转

3.1 四元数的基本概念

将三维矢量代数运算推广到乘法和除法运算的必要性，促使哈密顿（Hamilton）在 1843 年建立了四元数代数。所谓四元数，是指由一个实数单位 1 和三个虚数单位 i, j, k 组成并具有下列形式实元的数。

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{1} + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \quad (65)$$

其中 1 为四元数的实部，乘以 1 不会改变四元数，即分量 1 保持普通标量的性质。由于这种缘故，以后在四元数的表达式中，第一项 q_0 将不明确写出其单位 1。 i, j, k 为四元数的三个虚部。1, i, j, k 可以看做四维空间（用符号 $\mathbf{H}$ 表示）中的一组单位矢量。于是，任何四元数都可看作该空间中的一个点或矢量， q_0, q_1, q_2, q_3 则看作点或向量的坐标。因此，四元数也常写成向量的形式：

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \quad (66)$$

另外，可将单位 i, j, k 看作三维向量空间的单位向量，将 q_1, q_2, q_3 看作向量的分量。因此，四元数也可以写成标量部分 q_s 和矢量部分 $\mathbf{q}_v$ 之和。

$$\mathbf{q} = q_s + \mathbf{q}_v, \quad q_s = q_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{q}_v = [q_1, q_2, q_3]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (67)$$

或者如下向量形式

$$\mathbf{q} = [q_s, \mathbf{q}_v]^T \quad (68)$$

在空间 $\mathbf{H}$ 中四元数的加法以及四元数同标量的相乘和普通矢量空间中是一样的。空间 $\mathbf{H}$ 的特点在于，对乘法和除法运算封闭。四元数单位的乘法规则如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \circ i = i, 1 \circ j = j, 1 \circ k = k \\ i \circ i = -1, j \circ j = -1, k \circ k = -1 \\ i \circ j = -j \circ i = k, j \circ k = -k \circ j = i, k \circ i = -i \circ k = j \end{array} \right. \quad (69)$$

式中，我们用 $\circ$ 来表示四元数的乘法运算符。四元数虚数单位之间的乘法有如下特点：单位与单位自己相乘时，表现与复数一样，而两两之间的乘法则与三维向量的外积（叉乘）一样。利用图 3 的图示法容易记住这一乘法规则：按箭头排列的两个单位相乘时，便得到带正号的第三个单位；当反着移动时，便得到带负号的第三个单位。在这样的乘法规则下，两个四元数之积仍为四元数。

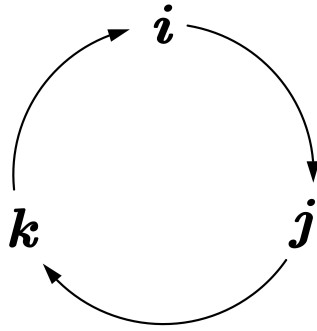


图 3: 四元数虚数单位的乘法规则图示

3.2 四元数的基本运算

(1) 如果两个四元数 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}$ 的诸元相等，则这两个四元数相等。

(2) 四元数 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{p}$ 之和为四元数，其各元为 $q_i + p_i$

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = (q_0 + p_0)1 + (q_1 + p_1)\mathbf{i} + (q_2 + p_2)\mathbf{j} + (q_3 + p_3)\mathbf{k} \quad (70)$$

(3) 四元数乘以标量 a 时，所有各元都乘以该数：

$$a\mathbf{q} = aq_0 1 + aq_1 \mathbf{i} + aq_2 \mathbf{j} + aq_3 \mathbf{k} \quad (71)$$

从上述定义可以看出，四元数的加法以及四元数同标量的乘法都服从于一般代数规则：

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad (\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{\Lambda} = \mathbf{q} + (\mathbf{p} + \mathbf{\Lambda}) \quad (72)$$

$$a\mathbf{q} = \mathbf{q}a, \quad (ab)\mathbf{q} = \mathbf{q}(ba) \quad (73)$$

$$(a + b)\mathbf{q} = a\mathbf{q} + b\mathbf{q}, \quad a(\mathbf{q} + \mathbf{p}) = a\mathbf{q} + a\mathbf{p} \quad (74)$$

(4) 四元数的乘法：四元数 p 与 q 相乘等于 p 的诸元与 q 诸元相乘，最后相加。四元数乘法符号用 $\circ$ 来表示，满足如下规则

$$\begin{aligned}
p \circ q &= (p_0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) \circ (q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\
&= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \\
&\quad + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2) \mathbf{i} \\
&\quad + (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3) \mathbf{j} \\
&\quad + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1) \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{75}$$

特别地，当两个零标量四元数（纯虚四元数）相乘，则有

$$\begin{aligned}
p_v \circ q_v &= (0 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) \circ (0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\
&= -(p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + (p_2 q_3 - p_3 q_2) \mathbf{i} + (p_3 q_1 - p_1 q_3) \mathbf{j} + (p_1 q_2 - p_2 q_1) \mathbf{k} \\
&= -p_v^T q_v + p_v \times q_v
\end{aligned} \tag{76}$$

注意，当我们写出 $p_v \circ q_v$ 时是将 p_v 和 q_v 看成零标量的四元数，即纯四元数。而写出 $p_v^T q_v$ 和 $p_v \times q_v$ 时是将它们看成是三维向量。

虽然(75)较为复杂，但是形式上是整齐有序的。如果写成向量形式并利用内外积运算，向量的乘法也可以写作如下更加简洁的形式：

$$\begin{aligned}
p \circ q &= (p_s + p_v) \circ (q_s + q_v) \\
&= p_s q_s + p_s q_v + q_s p_v + p_v \circ q_v \\
&= (p_s q_s - p_v^T q_v) + (p_s q_v + q_s p_v + p_v \times q_v)
\end{aligned} \tag{77}$$

如前面所述，四元数可以写成四维向量的坐标形式，如此，四元数的乘法则可以写成如下矩阵的形式：

$$p \circ q = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{78}$$

四元数乘法不满足交换律：根据式 (77)，可知由于两个四元数的乘积 $p \circ q$ 的向量部分包含向量的外积项 $p_v \times q_v$ 。因此，一般情况下， $p \circ q \neq q \circ p$ 。当且仅当 $p_v \times q_v = q_v \times p_v$ 时，即两个四元数的矢量部分相互平行（包括零矢量）时，两个四元数的乘法才满足交换律。

四元数乘法满足乘法的结合律和对加法的分配律：

$$(p \circ q) \circ \Lambda = p \circ (q \circ \Lambda) \tag{79}$$

$$p \circ (q + \Lambda) = p \circ q + p \circ \Lambda \tag{80}$$

(5) 共轭：将四元数 q 虚部反号得到对应的共轭四元数 q^*

$$\begin{aligned}
q^* &= q_0 1 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} \\
&= q_s - q_v
\end{aligned} \tag{81}$$

四元数与其共轭四元数相乘，得到一个实四元数（虚部为 0）

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* = q_s^2 + \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v \quad (82)$$

四元数共轭满足以下运算：

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^* \quad (83)$$

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \circ \mathbf{q} \quad (84)$$

$$(\mathbf{p} \circ \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \circ \mathbf{p}^* \quad (85)$$

$$(\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 \circ \cdots \circ \mathbf{q}_n)^* = \mathbf{q}_n^* \circ \mathbf{q}_{n-1}^* \circ \cdots \circ \mathbf{q}_2^* \circ \mathbf{q}_1^* \quad (86)$$

(6) 四元数的模定义为：

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (87)$$

容易验证，两个四元数乘积的模等于模的乘积。这使得两个单位四元数相乘之后仍是单位四元数（模为 1）

$$\|\mathbf{p} \circ \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \|\mathbf{q}\| \quad (88)$$

(7) 四元数的逆

四元数的逆记作 $\mathbf{q}^{-1}$ ：

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|^2} \quad (89)$$

按此定义，四元数与自己的逆的乘积为实四元数 1。

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{1} \quad (90)$$

如果 $\mathbf{q}$ 为单位四元数，它的逆等于它的共轭四元数。四元数的逆满足以下规律：

$$(\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 \circ \cdots \circ \mathbf{q}_n)^{-1} = \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{q}_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \mathbf{q}_2^{-1} \circ \mathbf{q}_1^{-1} \quad (91)$$

(8) 四元数的归一化

如果四元数的模不等于 0，即 $\|\mathbf{q}\| \neq 0$ ，则称 $\frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ 为四元数的归一化或规范化操作，归一化的四元数也称为单位四元数或规范化四元数，满足 $\|\mathbf{q}\| = 1$ 。

3.3 四元数的三角表示法

对于模不等于 0 的任意四元数 $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ 都可以表示成如下形式：

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}}{\|\mathbf{q}\|} \right) = \|\mathbf{q}\| \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}\|} \right) \quad (92)$$

我们引入一个沿 $\mathbf{q}_v$ 正方向上的单位向量 $\mathbf{u}$ ：

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}_v}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \frac{q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad (93)$$

应用单位矢量 $\mathbf{u}$ ，四元数 $\mathbf{q}$ 可写成如下形式：

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \left(\frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|} + \mathbf{u} \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\|\mathbf{q}\|} \right) \quad (94)$$

注意到四元数标量部分的平方与 $\mathbf{u}$ 的系数的平方之和为 1，我们可以引入如下的变量：

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\|\mathbf{q}\|} \quad (95)$$

式中 θ 对应一个转动的角度，我们将在3.4小节中详细解释其实际物理含义。应用上述符号，则四元数 $\mathbf{q}$ 可以表示为如下三角函数的形式：

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \left(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (96)$$

特别地，当 $\|\mathbf{q}\| = 1$ ，即对于单位四元数，有

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \quad (97)$$

3.4 四元数的旋转变换/算子

我们可以用四元数表达对三维向量的旋转。假设有一个空间三维向量/点 $\mathbf{p} = [x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ ，以及一个单位四元数 $\mathbf{q}$ 对应的旋转。三维向量 $\mathbf{p}$ 经过旋转之后变成了 $\mathbf{p}'$ 。如果用旋转矩阵描述，则有 $\mathbf{p}' = \mathbf{C}\mathbf{p}$ 。用四元数又该如何来描述上述旋转变换呢？

定理 1 对于任意单位四元数（模为 1） $\mathbf{q} = q_s + \mathbf{q}_v = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$ ，对于任意三维向量 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ ，算子 $L_q(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}^*$ 的作用等效于使向量 $\mathbf{p}$ 绕向量 $\mathbf{u}$ 的正方向旋转角度 θ 。

证明 1 将三维空间向量 $\mathbf{p}$ 用一个纯虚四元数来表示

$$\mathbf{p} = 0 + \mathbf{v} \quad (98)$$

将向量 $\mathbf{v}$ 分解为 $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$ ，其中 $\mathbf{a}$ 是与 $\mathbf{u}$ 共线的部分，有 $\mathbf{a} = k\mathbf{q}_v$ ， $\mathbf{n}$ 是与 $\mathbf{u}$ 垂直的分量。

首先，证明 $L_q(\cdot)$ 算子不会改变向量 $\mathbf{a}$ 的方向和长度。同样将 $\mathbf{a}$ 看作实部为 0 的纯虚四元数带入算子 $L_q(\cdot)$ ，有

$$\begin{aligned} L_q(\mathbf{a}) &= (q_s + \mathbf{q}_v) \circ \mathbf{a} \circ (q_s - \mathbf{q}_v) \\ &= (q_s + \mathbf{q}_v) \circ k\mathbf{q}_v \circ (q_s - \mathbf{q}_v) \\ &= (kq_s\mathbf{q}_v - k\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v + \mathbf{q}_v \times \mathbf{q}_v) \circ (q_s - \mathbf{q}_v) \\ &= (kq_s\mathbf{q}_v - k\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v) \circ (q_s - \mathbf{q}_v) \\ &= kq_s^2\mathbf{q}_v - kq_s\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v - kq_s\mathbf{q}_v \circ \mathbf{q}_v + (k\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v)\mathbf{q}_v \\ &= kq_s^2\mathbf{q}_v - kq_s\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v - kq_s(-\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v + \mathbf{q}_v \times \mathbf{q}_v) + (k\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v)\mathbf{q}_v \\ &= kq_s^2\mathbf{q}_v + k(\mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v)\mathbf{q}_v \\ &= k(q_s^2 + \mathbf{q}_v^T\mathbf{q}_v)\mathbf{q}_v \\ &= k\mathbf{q}_v \\ &= \mathbf{a} \end{aligned} \quad (99)$$

同理，将 $\mathbf{n}$ 看作实部为 0 的纯虚四元数代入算子 $L_q(\cdot)$ ，整理可得：

$$\begin{aligned}
L_q(\mathbf{n}) &= (q_s^2 - \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v) \mathbf{n} + 2q_s \sqrt{\mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \\
&= (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \mathbf{n} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \\
&= \mathbf{n} \cos \theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \sin \theta \\
&= \mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{n}_\perp \sin \theta
\end{aligned} \tag{100}$$

可见算子 $L_q(\cdot)$ 对 $\mathbf{n}$ 的作用等效于在 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}_\perp$ 定义的平面内旋转 θ 角，转轴为 $\mathbf{u}$ 的正方向。

易知， $L_q(\mathbf{v}) = L_q(\mathbf{a}) + L_q(\mathbf{n})$ ，则有

$$L_q(\mathbf{v}) = \mathbf{a} + \mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{n}_\perp \sin \theta \tag{101}$$

可见算子 $L_q(\cdot)$ 对三维向量 $\mathbf{v}$ 的作用等效于使其绕 $\mathbf{q}_v$ 正方向旋转 θ 角。

证毕。

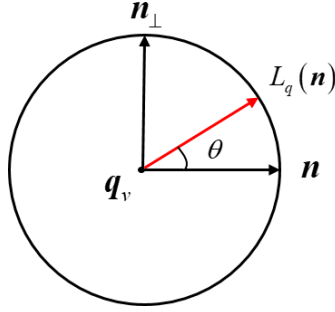


图 4: 算子 $L_q(\cdot)$ 使得向量 $\mathbf{n}$ 绕 $\mathbf{u}$ 正方向旋转 θ 角，图中 $\mathbf{q}_v$ 方向垂直纸面向外。

3.5 姿态四元数

用于描述刚体定点转动的四元数，叫作变换四元数或姿态四元数，要求其模长为 1，即规范化四元数。跟方向余弦矩阵类似，为了更加清晰地表示两个坐标系之间的转动变换关系，在后续应用中我们将写出姿态四元数的上下标，并明确指定上下标对应的含义，例如，对于任意姿态四元数 $\mathbf{q}_B^A$

$$\mathbf{q}_B^A = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{102}$$

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{103}$$

其中 A 和 B 为任意直角坐标系。我们从向量投影变换的角度将该四元数的物理意义定义为：该四元数通过以下算子实现了任意三维向量 $\mathbf{v}$ 在 B 系和 A 系间的坐标变换

$$\mathbf{v}^A = \mathbf{q}_B^A \circ \mathbf{v}^B \circ \mathbf{q}_B^{A*} \tag{104}$$

式中 $\mathbf{v}$ 应该看作是实部为 0 的纯虚四元数 $\mathbf{v} = 0 + \mathbf{v}$ 。要求姿态四元数的模为 1 的意义为：如果四元数 $\mathbf{q}_B^A$ 的模不等于 1，则姿态四元数的旋转算子，即式 (104)，不仅使向量 $\mathbf{v}$ 旋转，还会拉伸或压缩向量 $\mathbf{v}$ ，即改变 $\mathbf{v}$ 的长度。另外，如果将姿态四元数写成三角函数形式，

$$\mathbf{q}_B^A = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \quad (105)$$

则该四元数的物理意义为：坐标系 A 绕向量 $\mathbf{u}$ 的正方向转动角度 θ 后与坐标系 B 对齐。

假定有另一任意直角坐标系 D ，类似于(104)，有

$$\mathbf{v}^A = \mathbf{q}_D^A \circ \mathbf{v}^D \circ \mathbf{q}_D^{A*} \quad (106a)$$

$$\mathbf{v}^B = \mathbf{q}_D^B \circ \mathbf{v}^D \circ \mathbf{q}_D^{B*} \quad (106b)$$

将式(106b)代入式(104)，可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^A &= \mathbf{q}_B^A \circ \mathbf{q}_D^B \circ \mathbf{v}^D \circ \mathbf{q}_D^{B*} \circ \mathbf{q}_B^{A*} \\ &= \mathbf{q}_B^A \circ \mathbf{q}_D^B \circ \mathbf{v}^D \circ (\mathbf{q}_B^A \circ \mathbf{q}_D^B)^* \end{aligned} \quad (107)$$

对比式(107)和(106a)，可得姿态四元数满足如下连乘运算

$$\mathbf{q}_D^A = \mathbf{q}_B^A \circ \mathbf{q}_D^B \quad (108)$$

因为坐标系 A 相对于 B 的旋转矢量等于 B 相对于 A 的旋转矢量取负号，根据姿态四元数的三角函数形式，有

$$\mathbf{q}_A^B = \mathbf{q}_B^{A*} \quad (109)$$

3.6 四元数的微分方程

我们考虑一个动坐标系 b 相对于参考系 R 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_{Rb}$ 转动，则动坐标系与参考坐标系之间的变换四元数 $\mathbf{q}_b^R$ 随时间变化，是时间的函数。我们将动坐标系 b 在 t 和 $t + \Delta t$ 时刻的空间朝向（即瞬时坐标系）记作 b_1 和 b_2 。用 $\mathbf{q}_{b_1}^R$ 表示 t 时刻的四元数， $\mathbf{q}_{b_2}^R$ 表示 $t + \Delta t$ 时刻的四元数，则 $\mathbf{q}_{b_2}^R$ 相当于 $\mathbf{q}_{b_1}^R$ 与 $\mathbf{q}_{b_2}^{b_1}$ 两次转动的合成四元数。根据姿态四元数的连乘运算法则，有

$$\mathbf{q}_{b_2}^R \equiv \mathbf{q}_{b(t+\Delta t)}^R = \mathbf{q}_{b_1}^R \circ \mathbf{q}_{b_2}^{b_1} \quad (110)$$

式中 b_1 是任意时刻 t 的瞬时 b 系，可看作相对 R 系静止。 b_2 是 $t + \Delta t$ 时刻的新 b 系。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， b_1 与 b_2 非常接近。当 b 系从 b_1 转动到 b_2 ，姿态四元数 $\mathbf{q}_b^R$ 相应的变化四元数记作

$$\Delta \mathbf{q}_b^R = \mathbf{q}_{b_2}^R - \mathbf{q}_{b_1}^R \quad (111)$$

当 b_1 与 b_2 均非常接近 b 系时，有

$$\Delta \mathbf{q}_b^R = \mathbf{q}_{b_1}^R \circ \mathbf{q}_{b_2}^{b_1} - \mathbf{q}_{b_1}^R = \mathbf{q}_{b_1}^R \circ (\mathbf{q}_{b_2}^{b_1} - \mathbf{q}_1) \approx \mathbf{q}_b^R \circ (\mathbf{q}_{b_2}^{b_1} - \mathbf{q}_1) \quad (112)$$

其中，

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

我们将与 $\mathbf{q}_{b_2}^{b_1}$ 四元数对应的等效旋转矢量记作 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ ，这句话意味着 b_1 绕向量 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 的正方向转动角度 $\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|$ 后与 b_2 对齐，旋转矢量的概念将在下一节中介绍。当 b_1 坐标系与 b_2 系彼此之间非常接近，此时 $\Delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{0}$ ，有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{q}_{b_2}^{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (114)$$

将上式代入(112)，可得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{q}_b^R = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^R \circ \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad (115)$$

根据导数的定义，有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_b^R(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q}_b^R(t + \Delta t) - \mathbf{q}_b^R(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^R(t) \circ \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (116)$$

接下来我们根据方向余弦矩阵来求解 $\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的具体表达式。与 $\mathbf{q}_{b_2}^{b_1}$ 对应的姿态矩阵，记作 $\mathbf{C}_{b_2}^{b_1}$ ， $\Delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow \mathbf{0}$ ，有

$$\mathbf{C}_{b_2}^{b_1} \approx \mathbf{I} + (\Delta\boldsymbol{\theta} \times) \quad (117)$$

对上式求导，可得

$$\dot{\mathbf{C}}_{b_2}^{b_1} = (\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \times) \quad (118)$$

另外，根据方向余弦矩阵的微分方程，有

$$\dot{\mathbf{C}}_{b_2}^{b_1} = \mathbf{C}_{b_2}^{b_1} (\boldsymbol{\omega}_{b_1 b_2}^{b_2} \times) \quad (119)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， b_1 与 b_2 非常接近，且与 b 系接近，此时 $\mathbf{C}_{b_2}^{b_1} = \mathbf{I}$ 。且 b_1 相对于 R 系静止，所以有

$$\dot{\mathbf{C}}_{b_2}^{b_1} = (\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times) \quad (120)$$

所以

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \quad (121)$$

将上式代入(116)，得

$$\dot{\mathbf{q}}_b^R = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^R \circ \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \end{bmatrix} \quad (122)$$

上式即姿态四元数的微分方程，可写成如下矩阵形式：

$$\dot{\mathbf{q}}_b^R = \frac{1}{2} \mathbf{W} \mathbf{q}_b^R \quad (123)$$

其中，

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{Rb,x}^b & -\omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b \\ \omega_{Rb,x}^b & 0 & \omega_{Rb,z}^b & -\omega_{Rb,y}^b \\ \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b & 0 & \omega_{Rb,x}^b \\ \omega_{Rb,z}^b & \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,x}^b & 0 \end{bmatrix} \quad (124)$$

3.7 四元数微分方程的求解

将四元数微分方程写成矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}_b^R(t) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(t) \mathbf{q}_b^R(t) \quad (125)$$

如果角速度 ω_{Rb}^b 是时变的，则矩阵 $\mathbf{W}$ 也是时变的，类似于方向余弦矩阵微分方程的求解，可用迭代逼近法求解四元数微分方程。在 $t, \tau \in [0, T]$ 时间段内如果 b 系的转动满足定轴转动条件(44)，可求得如下闭合解

$$\mathbf{q}_b^R(t) = \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{W} d\tau \right) \right] \mathbf{q}_b^R(0) \quad (126)$$

令

$$\Theta \equiv \int_0^t \mathbf{W} d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{Rb,x}^b & -\omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b \\ \omega_{Rb,x}^b & 0 & \omega_{Rb,z}^b & -\omega_{Rb,y}^b \\ \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b & 0 & \omega_{Rb,x}^b \\ \omega_{Rb,z}^b & \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,x}^b & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (127a)$$

$$\Delta\theta \equiv \int_0^t \omega_{Rb}^b(\tau) d\tau = [\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z]^T \quad (127b)$$

$$\Delta\theta \equiv \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2} \quad (127c)$$

角增量矩阵 Θ 的各次幂具有如下性质：

$$\begin{cases} \Theta^2 = -\Delta\theta^2 \mathbf{I} \\ \Theta^3 = -\Delta\theta^2 \Theta \\ \Theta^4 = \Delta\theta^4 \mathbf{I} \\ \Theta^5 = \Delta\theta^4 \Theta \\ \dots \end{cases} \quad (128)$$

则四元数微分方程的解析解表达式(126)可写作如下形式：

$$\mathbf{q}_b^R(t) = e^{\frac{1}{2}\Theta(t)} \mathbf{q}_b^R(0) \quad (129)$$

上式中的指数函数 $e^{\frac{1}{2}\Theta(t)}$ 做级数展开，可得

$$e^{\frac{1}{2}\Theta(t)} = \mathbf{I} + \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\Theta}{2} \right)^n + \dots \quad (130)$$

将式(128)代入上式，可得

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\Theta(t)} &= \mathbf{I} + \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^2 \mathbf{I} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^2 \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^4 \mathbf{I} + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^4 \frac{\Theta}{2} - \dots \\ &= \mathbf{I} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^4 - \dots \right\} + \frac{\Theta}{\Delta\theta} \left\{ \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)^5 - \dots \right\} \\ &= \mathbf{I} \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Theta}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \end{aligned} \quad (131)$$

将上式代入式(129)，可得

$$\mathbf{q}_b^R(t) = \left[\mathbf{I} \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right] \mathbf{q}_b^R(0) \quad (132)$$

根据(78)，上式可写成如下形式

$$\mathbf{q}_b^R(t) = \mathbf{q}_b^R(0) \circ \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta\theta}{2} \\ \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (133)$$

当积分时间从 $[0, t]$ 改为 $[t_{k-1}, t_k]$ ，选择惯性系 i 为参考系，且假设已知 t_{k-1} 时刻的惯导姿态四元数为 $\mathbf{q}_b^i(t_{k-1}) \equiv \mathbf{q}_{b(k-1)}^i$ 。此时，陀螺输出的角增量为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) dt$ ，它的模记为 $\Delta\theta_k = \|\Delta\boldsymbol{\theta}_k\|$ ，则求解 t_k 时刻的惯导姿态四元数 $\mathbf{q}_{b(k)}^i$ 的公式为

$$\mathbf{q}_{b(k)}^i = \mathbf{q}_{b(k-1)}^i \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (134)$$

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta\theta_k}{2} \\ \frac{\Delta\boldsymbol{\theta}_k}{\Delta\theta_k} \sin \frac{\Delta\theta_k}{2} \end{bmatrix} \quad (135)$$

上式即姿态更新的四元数递推计算公式。与求解方向余弦矩阵微分方程类似，(135)只有当 b 系在时段 $[t_{k-1}, t_k]$ 内做定轴转动时才严格成立。

要点回顾

四元数要点回顾

- 1 四元数主要有以下表示方式： $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ 、向量坐标形式 $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ 、 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_v$ 或三角函数形式 $\mathbf{q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$ 。
- 2 四元数虚数单位之间的乘法有如下特点：单位与单位自己相乘时，表现与复数一样，而两两之间的乘法则与三维向量的外积（叉乘）一样。
- 3 用四元数的旋转变换算子可实现三维向量的坐标变换： $\mathbf{v}^R = \mathbf{q}_b^R \circ \mathbf{v}^b \circ \mathbf{q}_b^{R*}$ 。
- 4 四元数的微分方程式： $\dot{\mathbf{q}}_b^R = \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^R \circ \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \end{bmatrix}$ ，或写作矩阵形式： $\dot{\mathbf{q}}_b^R = \frac{1}{2} \mathbf{W} \mathbf{q}_b^R$ 。
- 5 求解四元数的微分方程，当 b 系满足“定轴转动”条件时，可得解析解： $\mathbf{q}_b^R(t) = \left[\mathbf{I} \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right] \mathbf{q}_b^R(0)$ 。

4 等效旋转矢量

欧拉在研究刚体运动时最早提出了等效旋转矢量的概念，他指出刚体的定点有限旋转都可以用绕经过该固定点的一个轴的一次转动来实现（如图 5所示），并建立了刚体上单位矢量在转动前后的变换公式。现代捷联惯性导航姿态更新算法研究的关键在于如何使用陀螺的测量值构造出对应的等效旋转矢量，以尽量减小或消除姿态更新算法中的不可交换性误差。后续使用等效旋转矢量来计算姿态的变化，如用方向余弦矩阵或四元数来表示，将变得非常简单。接下来我们将首先介绍转动的不可交换性概念及其与惯导姿态算法的关联性，接着给出等效旋转矢量微分方程的推导，然后给出针对实际工程应用的等效旋转矢量微分方程求解公式，即如何根据陀螺的角增量输出构造相应的等效旋转矢量。

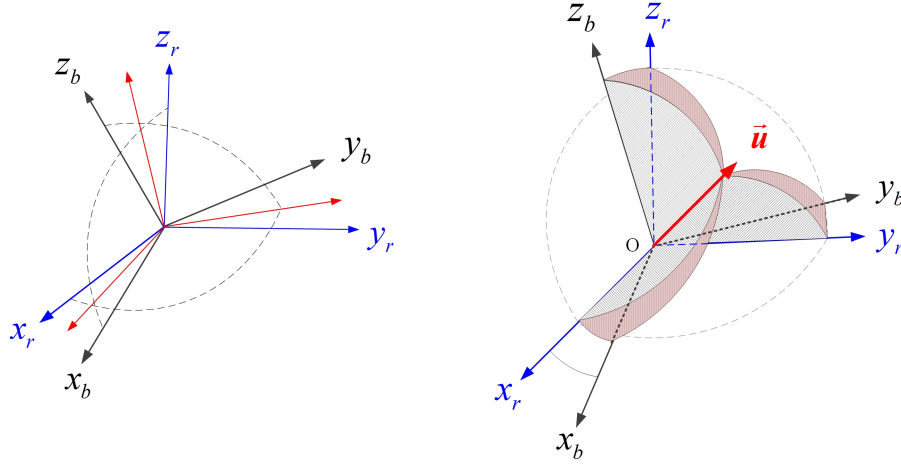


图 5: 坐标系的等效转动

4.1 转动的不可交换性

我们知道，在经典力学中，刚体的有限转动是不可交换的。如图 6所示，对同一刚体做两种不同顺序的转动：(1) 刚体先绕 x 轴正转 90° ，然后绕 y 轴正转 90° ；(2) 刚体先绕 y 轴正转 90° ，然后绕 x 轴正转 90° 。两种情况下，转轴和转角大小是一样的，但是转轴顺序不一致，最终的结果（即刚体的空间朝向）明显不一样。这就是转动的不可交换性问题。这一问题可以用不同的语言或方式来描述，但他们本质上都是一样的。

(1) 从欧拉角的角度来看：因为刚体的有限转动是不可交换的，所以在给出一组欧拉角的时候一定要同时指定相应的转轴顺序才有意义，这是我们在介绍欧拉角的时候特别强调了的。另外，转动的不可交换性决定了两次以上不同轴的转动不能相加，也即两次转动对应的两组欧拉角不能直接相加来表示两次转动的合成。

(2) 用矩阵的语言来描述，即变换矩阵的乘法不满足交换律。同样，对于姿态四元数来说，它们也不满足乘法的交换律。举个例子，假设有参考坐标系 n 和动坐标系 b ，第一种情况， b 系相对于 n 系按“ZYX”的转轴顺序转动三个角度 ψ 、 θ 和 ϕ 变换到新的位置。第二种情况， b 系相对于 n 系按“XYZ”的转轴顺序转动三个同样大小的角度 ϕ 、 θ 和 ψ 。根据1.3小结的方法，我们可写出两种情况下对应的坐

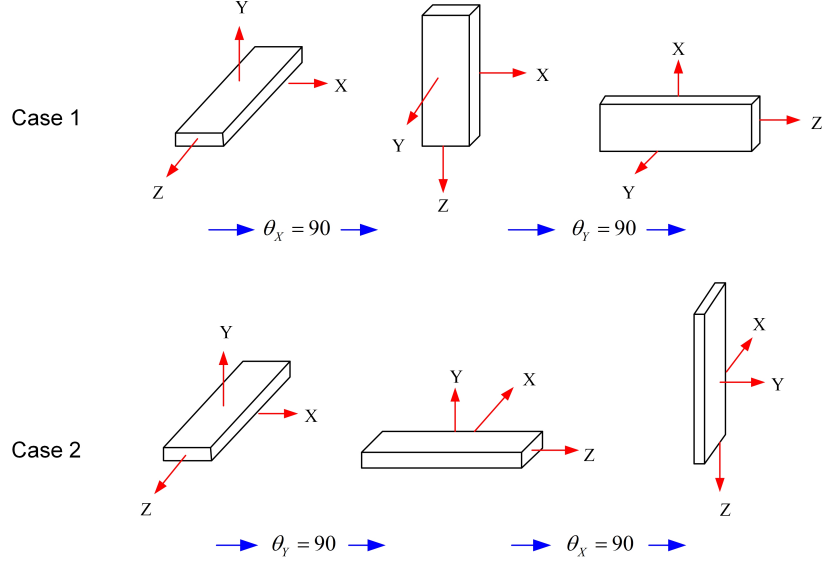


图 6: 刚体连续转动的不可交换性

标变换矩阵 $\mathbf{C}_n^b$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^b(\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^b(\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\psi c\phi + s\theta s\phi c\psi & s\psi s\phi - s\theta c\phi c\psi \\ -c\theta s\psi & c\psi c\phi - s\theta s\phi s\psi & c\psi s\phi + s\theta c\phi s\psi \\ s\theta & -c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (137)$$

式中 $\mathbf{C}_n^b(\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi)$ 和 $\mathbf{C}_n^b(\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi)$ 分别是第一、二种情况对应的变换矩阵。很明显 $\mathbf{C}_n^b(\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi) \neq \mathbf{C}_n^b(\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi)$ 。但是，当转角 ϕ , θ 和 ψ 都是一阶小量的小角度时，则 $\cos x = 1, \sin x = x, x = \phi, \theta, \psi$ 。在忽略二阶小量的情况下

$$\mathbf{C}_n^b(\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi) = \mathbf{C}_n^b(\phi \rightarrow \theta \rightarrow \psi) \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (138)$$

可见，在忽略二阶小量的情况下，对小角度的转动是可交换顺序的，即小角度可以看作矢量，能按矢量相加。

那么，转动的不可交换性问题跟惯性导航姿态算法有什么关系呢？这个问题是怎么影响惯性导航解算的呢？我们先回顾陀螺的角增量测量值

$$\Delta\theta(t) = \int_0^t \omega_{ib}^b(\tau) d\tau \quad (139)$$

陀螺输出时只对各轴的角增量做了数值累加，并不考虑角速度向量 ω_{ib}^b 在积分时段内的方向变化。按照这样的逻辑，对于图 6 的示例，两种情况下的角增量输出都是 $[90^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ ，因而这样的角增量测量值无法反映真实的刚体转动情况。因为完全忽略了角速度向量的方向变化，这就使得角增量测量值的物理意义变得不明确。

前面我们在求解方向余弦矩阵和四元数的微分方程时，都用到了角速度矢量的积分。当载体的角速度方向随时间变化而不是做“定轴转动”时，如果我们还是直接将这样的角增量测量值代入方向余弦矩阵或四元数微分方程的求解计算式中，即式(56)和(135)，则会带来所谓的“不可交换性误差”，这种误差正是由于我们忽略了积分时段内角速度向量在空间中的方向变化所导致的。

在实际导航应用中，我们要尽可能减小或消除“不可交换性误差”的影响。一般有如下两种方法来解决这一问题：(1) 提高惯导原始数据的采样率，即减小积分时长，因为在更短的时间区间内，角速度向量才能更加近似地看作“方向不变”。(2) 根据陀螺输出的多个角增量测量值，构造出一个在积分时段内方向不变的等效的角速度积分值，我们称之为“等效旋转矢量”。前者会增大计算量，且无法完全消除“不可交换性误差”的影响，后者从理论上可完美解决这一问题。接下来，我们首先推导“等效旋转矢量”的微分方程（Bortz 方程），它描述了等效旋转矢量导数与角速度向量的关系，然后通过求解 Bortz 方程，可得到利用陀螺输出计算等效旋转矢量的表达式。

4.2 等效旋转矢量的微分方程

我们将根据四元数的微分方程式来推导等效旋转矢量（用粗体希腊字母 ϕ 来表示）的微分方程式。假设坐标系 b 与参考系 R 之间的相对姿态关系可描述如下：坐标系 b 绕向量 ϕ 的正方向从与 R 系对齐的初始空间朝向转动角度 ϕ 后得到当前的 b 系，其中 $\phi = \|\phi\|$ ，也即向量 ϕ 的方向表示旋转轴的正方向，其模长表示旋转的角度大小。我们需要明确写出等效旋转矢量的下标，如 ϕ_{Rb} 表示 b 系相对于 R 系的转动的旋转矢量，但一般情况下我们不写旋转矢量的上标，即投影坐标系。这是因为，等效旋转矢量在 b 系和 R 系下有相同的坐标值³。

与上述 b 系和 R 系相对姿态对应的四元数记作 q_b^R ，可写作如下三角函数形式：

$$q_b^R = \cos \frac{\phi_{Rb}}{2} + \frac{\phi_{Rb}}{\phi_{Rb}} \sin \frac{\phi_{Rb}}{2} \quad (140)$$

在接下来的推导中，为书写方便我们将省略四元数 q_b^R 的上下标，简写为 q ，角速度向量 ω_{Rb}^b 简写为 ω ，等效旋转矢量 ϕ_{Rb} 简写为 ϕ 。将上述四元数记作

$$q = f_1 + f_2\phi \quad f_1 \equiv \cos \frac{\phi}{2} \quad f_2 \equiv \frac{1}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} \quad (141)$$

根据姿态四元数的微分方程，有

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \circ \omega \quad (142)$$

³ b 系和 R 系的三个轴分别位于三个绕 ϕ 形成的圆锥的圆锥面上。

注意，上式中的 ω 应看作实部为 0 的纯虚四元数。将(141)带入上式，应用四元数乘法运算法则，有

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}f_1\omega + \frac{1}{2}f_2\phi \circ \omega \quad (143)$$

根据式(76)，上式可写作

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}f_1\omega + \frac{1}{2}f_2(\phi \times \omega - \phi^T\omega) \quad (144)$$

对式(141)中各式等号两边求导，可得

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{f}_1 + \dot{f}_2\phi + f_2\dot{\phi} \quad (145a)$$

$$\dot{f}_1 = -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)\dot{\phi} = -\frac{1}{2}\phi\dot{\phi}f_2 \quad (145b)$$

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)\frac{\dot{\phi}}{\phi^2} = \frac{\dot{\phi}}{\phi}\left(\frac{1}{2}f_1 - f_2\right) \quad (145c)$$

将(145b)和(145c)带入(145a)，可得

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2}\phi\dot{\phi}f_2 + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\left(\frac{1}{2}f_1 - f_2\right)\phi + f_2\dot{\phi} \quad (146)$$

令(144)等号右边与(146)等号右边相等，可得

$$\frac{1}{2}f_1\omega + \frac{1}{2}f_2(\phi \times \omega - \phi^T\omega) = -\frac{1}{2}\phi\dot{\phi}f_2 + \frac{\dot{\phi}}{\phi}\left(\frac{1}{2}f_1 - f_2\right)\phi + f_2\dot{\phi} \quad (147)$$

整理，可得

$$\frac{1}{2}f_1\omega + \frac{1}{2}f_2(\phi \times \omega - \phi^T\omega) + \frac{1}{2}\phi\dot{\phi}f_2 - \frac{\dot{\phi}}{\phi}\left(\frac{1}{2}f_1 - f_2\right)\phi = f_2\dot{\phi} \quad (148)$$

上式等号两边除以系数 f_2 ，整理可得

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}\frac{f_1}{f_2}\omega + \frac{1}{2}(\phi \times \omega) - \frac{\dot{\phi}}{\phi}\left(\frac{1}{2}\frac{f_1}{f_2} - 1\right)\phi + \frac{1}{2}\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}\phi^T\omega \quad (149)$$

上式中，最后两项是标量，因为向量 ϕ 的导数必然还是向量，所以上式的标量部分应该等于 0，即

$$\phi\dot{\phi} = \phi^T\omega \quad (150)$$

上式等号两边除以 ϕ^2 ，可得

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{\phi^2}\phi^T\omega \quad (151)$$

将上式代入(149)，得

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}\frac{f_1}{f_2}\omega + \frac{1}{2}(\phi \times \omega) - \frac{1}{\phi^2}\left(\frac{1}{2}\frac{f_1}{f_2} - 1\right)(\phi^T\omega)\phi \quad (152)$$

根据三重矢积公式⁴，易得

$$\begin{aligned} (\phi^T\omega)\phi &= \phi \times (\phi \times \omega) + \phi^T\phi\omega \\ &= \phi \times (\phi \times \omega) + \phi^2\omega \end{aligned} \quad (153)$$

⁴ $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3$

将上式代入(152)，整理可得

$$\dot{\phi} = \omega + \frac{1}{2}(\phi \times \omega) + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{f_2} \right) \phi \times (\phi \times \omega) \quad (154)$$

根据式(141)，易得

$$1 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{f_2} = 1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} \quad (155)$$

将上式代入(154)，并写出角速度向量的上下标，可得

$$\dot{\phi} = \omega + \frac{1}{2}(\phi \times \omega) + \frac{1}{\phi^2} \left[1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} \right] \phi \times (\phi \times \omega) \quad (156a)$$

$$\phi(0) = \mathbf{0} \quad (156b)$$

上式即常用的等效旋转矢量的微分方程，该公式最早由 John E. Bortz 于 1969 年在他的博士论文中推导得到，并于 1971 年正式发表，后来常称之为 **Bortz 方程**，它是利用陀螺输出求解等效旋转矢量的基本公式。一般情况下，我们只用等效旋转矢量来表示姿态的变化量，所以给出积分初值条件(156b)。

Bortz 方程等号右边第一项 ω 表示角速度向量，第二项 $\phi \times \omega$ 的方向沿着角速度向量 ω 轨迹线的切线方向，而第三项 $\phi \times (\phi \times \omega)$ 则沿着 ω 轨迹线的法线方向，如图 7 所示。因此，使用等效旋转矢量相当于补偿了积分时段内角速度向量的方向变化。

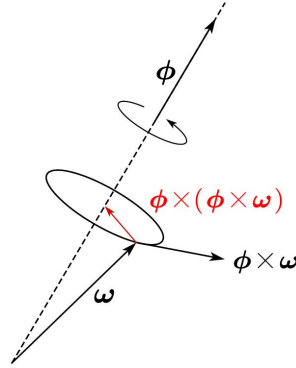


图 7: Bortz 方程中的向量

4.3 等效旋转矢量微分方程求解

高阶项的存在使得等效旋转矢量微分方程的求解变得非常复杂，对高阶旋转矢量微分方程进行求解是近期捷联惯导算法研究的一个热点，但是高阶高精度姿态求解只针对特别场景及极高精度惯导适用。一般的惯性导航工程应用中都会对(156a)进行简化之后再求解，得到等效旋转矢量的求解式。接下来我们介绍等效旋转矢量微分方程的化简及求解。

4.3.1 等效旋转矢量微分方程的工程近似

通过简单的三角函数变换，式(156a)可变换为如下形式：

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} \right) \phi \times (\phi \times \omega) \\ &= \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \frac{2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right) \phi \times (\phi \times \omega) \\ &= \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega + \frac{1}{\phi^2} \left(1 - \frac{\phi}{2} \cot \frac{\phi}{2} \right) \phi \times (\phi \times \omega)\end{aligned}\quad (157)$$

当 ϕ 为小量时，对上式中的 $\cot \frac{\phi}{2}$ 做泰勒级数展开，可得：

$$\dot{\phi} = \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega + \frac{1}{\phi^2} \left[1 - \frac{\phi}{2} \left(\frac{2}{\phi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\phi}{2} - \dots \right) \right] \phi \times (\phi \times \omega) \quad (158)$$

近似处理 1：取至三角函数展开式的第二项，可得：

$$\dot{\phi} \approx \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega + \frac{1}{12}\phi \times (\phi \times \omega) \quad (159)$$

近似处理 2：在实际工程应用中，常忽略上式右边第三项 (ϕ 的二阶小)，得

$$\dot{\phi} \approx \omega + \frac{1}{2}\phi \times \omega \quad (160)$$

近似处理 3：一般情况下，上式还可以进一步近似为

$$\dot{\phi}(t) = \omega(t) + \frac{1}{2}\Delta\theta(t) \times \omega(t) \quad (161)$$

其中

$$\Delta\theta(t) = \int_{t_{k-1}}^t \omega(\tau) d\tau, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (162)$$

式(161)是一般惯性导航工程应用中根据陀螺角增量输出求解等效旋转矢量的计算式。接下来我们首先讨论近似处理 3 的合理性及成立条件，对这一讨论不感兴趣的读者可以直接跳转到4.3.2小节。

对(160)求积分，得

$$\phi(t) = \phi(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t \left[\omega(\tau) + \frac{1}{2}\phi(\tau) \times \omega(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (163)$$

一般我们只用 ϕ 来表示两个历元之间的姿态变化，所以 $\phi(t_{k-1}) = \mathbf{0}$ 。

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_{t_{k-1}}^t \omega(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t \phi(\tau) \times \omega(\tau) d\tau \\ &= \Delta\theta(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t \phi(\tau) \times \omega(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (164)$$

上式等号右边积分号内仍含有待求变量 $\phi(t)$ ，所以按迭代积分的思路，将上式等号右边整体代入其积分号内，替换 $\phi(t)$ ，得

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \Delta\theta(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t \left[\Delta\theta(\tau) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{\tau} \phi(\tau_1) \times \omega(\tau_1) d\tau_1 \right] \times \omega(\tau) d\tau \\ &= \Delta\theta(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t \Delta\theta(\tau) \times \omega(\tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_{t_{k-1}}^t \left(\int_{t_{k-1}}^{\tau} \phi(\tau_1) \times \omega(\tau_1) d\tau_1 \right) \times \omega(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (165)$$

在时段 $[t_{k-1}, t]$ 内如果 $\phi(\tau_1)$ 为小量, 则上式等号右边第三项远小于第二项, 故上式可简化如下:

$$\phi(t) \approx \Delta\theta(t) + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^t \Delta\theta(\tau) \times \omega(\tau) d\tau \quad (166)$$

上式右边第二项是等效旋转矢量 ϕ 与角增量 $\Delta\theta$ 之间的差值, 通常称作转动不可交换性误差的修正量。对上式等号两边同时求导, 可得等效旋转矢量的简化式(161)。

4.3.2 求解等效旋转矢量微分方程

在实际应用中, 高精度捷联惯性导航系统中的陀螺输出一般采用角增量形式, 即采样间隔内的角度增量, 接下来基于式(161)根据陀螺输出的角增量测量值求解等效旋转矢量。(161)中, 令 $t = t_k$, 有

$$\phi_k \equiv \phi(t_k) = \Delta\theta_k + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta\theta(t) \times \omega(t) dt, \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (167)$$

式中, $\Delta\theta_k = \Delta\theta(t_k)$ 。因为我们无法根据单次陀螺角增量输出求解出对应的等效旋转矢量, 上式中的积分项难以做进一步处理。一般情况下, 我们需要对一个时段内的若干次陀螺角增量输出做一定的数学模型假设, 来逼近载体的真实角运动。常用的假设包括:

单子样假设: 假设在积分时段内 $[t_{k-1}, t_k]$, 角速度向量 ω_{Rb}^b 为常向量 (即方向和大小都保持不变), 即

$$\omega(t) = \omega(t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (168)$$

此时, $\Delta\theta(t)$ 与 ω 方向相同, 所以 $\frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Delta\theta(t) \times \omega(t) dt = \mathbf{0}$ 。因此, 有

$$\phi_k = \Delta\theta_k \quad (169)$$

双子样假设: 角速度向量在积分时间 $[t_{k-2}, t_k]$ 内随时间线性变化。即

$$\omega(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1}) \quad (170)$$

根据陀螺角增量输出定义, 有

$$\Delta\theta_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau = \mathbf{a}T + \frac{1}{2}\mathbf{b}T^2 \quad (171a)$$

$$\Delta\theta_{k-1} = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \omega(\tau) d\tau = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau = \mathbf{a}T - \frac{1}{2}\mathbf{b}T^2 \quad (171b)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta(t) &= \int_{t_{k-1}}^t \omega(\tau) d\tau = \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{a} + \mathbf{b}(\tau - t_{k-1}) d\tau \\ &= \mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}(t - t_{k-1})^2 \end{aligned} \quad (171c)$$

式中, T 为采样间隔, $T = t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1}$, 根据(171a)和(171b), 可求解系数 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\theta_{k-1} + \Delta\theta_k}{2T}, \quad \mathbf{b} = \frac{\Delta\theta_k - \Delta\theta_{k-1}}{T^2} \quad (172)$$

将式 (170) 和 (171c) 代入(167)积分式可得：

$$\begin{aligned}
 \phi_k &= \Delta\theta_k + \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\mathbf{a}(t - t_{k-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{b}(t - t_{k-1})^2 \right] \times [\mathbf{a} + \mathbf{b}(t - t_{k-1})] dt \\
 &= \Delta\theta_k + \frac{1}{4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{a} \times \mathbf{b}(t - t_{k-1})^2 dt \\
 &= \Delta\theta_k + \frac{1}{12} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) T^3
 \end{aligned} \tag{173}$$

将式 (172) 代入上式，整理可得

$$\begin{aligned}
 \phi_k &= \Delta\theta_k + \frac{1}{12} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) T^3 \\
 &= \Delta\theta_k + \frac{1}{24} (\Delta\theta_{k-1} + \Delta\theta_k) \times (\Delta\theta_k - \Delta\theta_{k-1}) \\
 &= \Delta\theta_k + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k
 \end{aligned} \tag{174}$$

要点回顾

等效旋转矢量要点回顾

- 1 刚体的有限转动是不可交换的。刚体的定点有限旋转都可以用绕经过该固定点的一个轴的一次转动来实现
- 2 当载体的角速度方向随时间变化而不是做“定轴转动”时，直接将传感器角增量测量值代入方向余弦矩阵或四元数微分方程的求解计算式中，式(56)和(135)，则会带来“不可交换性误差”。
- 3 Bortz 方程： $\dot{\phi} = \omega + \frac{1}{2}(\phi \times \omega) + \frac{1}{\phi^2} \left[1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} \right] \phi \times (\phi \times \omega)$ 。
- 4 等效旋转矢量的双子样求解式： $\phi_k = \Delta\theta_k + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k$ 。

5 姿态更新算法示例

接下来，我们给出一个姿态更新算法案例。所谓姿态更新算法就是根据前一时刻的姿态和陀螺输出的一个或多个测量值，计算当前时刻的姿态。姿态的递推计算可采用方向余弦矩阵或者四元数来实现，而姿态的变化我们则采用等效旋转矢量来表示。

已知量

- 前一历元/时刻的姿态： $\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})$, $\mathbf{q}_b^n(t_{k-1})$ 。
- 陀螺输出的角增量测量值： $\Delta\theta_k$, $\Delta\theta_{k-1}$ 。

待求量：

- 当前历元/时刻的姿态： $\mathbf{C}_b^n(t_k)$ 或 $\mathbf{q}_b^n(t_k)$ 。

用四元数进行姿态更新计算

姿态的递推计算可用四元数的如下连乘运算来实现：

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \circ \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \circ \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (175a)$$

式中， $\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$ 表示 b 系姿态变化对应的四元数，

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\phi_k\| \\ \frac{\sin\|0.5\phi_k\|}{\|0.5\phi_k\|} 0.5\phi_k \end{bmatrix} \quad (175b)$$

其中， ϕ_k 表示对应的等效旋转矢量， $\|\phi_k\| = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}$ 表示等效旋转矢量的模长。 ϕ_k 采用双子样计算式。

$$\phi_k = \Delta\theta_k + \frac{1}{12}\Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k \quad (175c)$$

$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 表示 n 系姿态变化对应的四元数，

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\zeta_k\| \\ -\frac{\sin\|0.5\zeta_k\|}{\|0.5\zeta_k\|} 0.5\zeta_k \end{bmatrix} \quad (175d)$$

式中， ζ_k 表示 n 系变化对应的等效旋转矢量，可理解为： n 系从 t_{k-1} 时刻的状态，记作 $n(k-1)$ ，绕向量 ζ_k 正转角度 $\|\zeta_k\|$ 后达到 t_k 时刻的状态，即 $n(k)$ 。 ζ_k 计算如下：

$$\zeta_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\omega_{ie}^n(t) + \omega_{en}^n(t)] dt \approx [\omega_{ie}^n(t_{k-1}) + \omega_{en}^n(t_{k-1})] \Delta t \quad (175e)$$

其中，

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_e \cos \varphi & 0 & -\omega_e \sin \varphi \end{bmatrix}^T \quad (175f)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} v_E/(R_N + h) \\ -v_N/(R_M + h) \\ -v_E \tan \varphi/(R_N + h) \end{bmatrix} \quad (175g)$$

$$R_M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad (175h)$$

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (175i)$$

式中 φ 为纬度（单位弧度）， v_E ， v_N 分别为东向和北向速度。 R_M 和 R_N 分别为子午圈半径和卯酉圈半径。 a 为地球椭球长半轴， e 为地球椭球模型第一偏心率，对于 CGCS2000 椭球， $a = 6378137.0m$ ， $e = 0.08181919104$ 。

用方向余弦矩阵进行姿态更新计算

用方向余弦矩阵来实现姿态的递推计算，跟四元数类似，可以通过如下连乘运算来实现

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (176)$$

其中， b 系和 n 系姿态变化矩阵 $\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$ 和 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 计算如下：

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin \|\boldsymbol{\phi}_k\|}{\|\boldsymbol{\phi}_k\|} (\boldsymbol{\phi}_k \times) + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\phi}_k\|}{\|\boldsymbol{\phi}_k\|^2} (\boldsymbol{\phi}_k \times) (\boldsymbol{\phi}_k \times) \quad (177)$$

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} = \mathbf{I} - \frac{\sin \|\boldsymbol{\zeta}_k\|}{\|\boldsymbol{\zeta}_k\|} (\boldsymbol{\zeta}_k \times) + \frac{1 - \cos \|\boldsymbol{\zeta}_k\|}{\|\boldsymbol{\zeta}_k\|^2} (\boldsymbol{\zeta}_k \times) (\boldsymbol{\zeta}_k \times) \quad (178)$$

等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}_k$ 和 $\boldsymbol{\zeta}_k$ 分别按式(175c)和(175e)进行计算，相关变量按(175f)-(175i)进行计算。

附录 姿态表达式的相互转换

前面介绍的四种姿态表达式在惯性导航应用中经常联合使用，需要相互转换。接下来，我们以载体系 b 系和参考系 R 系为例，讨论这两个坐标系的相对姿态表达式之间相互转换的计算公式。在此之前，我们再次明确强调各个符号的定义。 b 系相对 R 系的姿态关系描述如下： R 系按“ZYX”的转轴顺序依次转动角度 ψ ， θ 和 ϕ 后与 b 系对齐。用等效旋转矢量则可做如下描述： R 系统绕空间矢量 ϕ 的方向转动角度 $\phi \equiv \|\phi\|$ 后与 b 系对齐。相应的方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^R$ 和姿态四元数 q_b^R 的定义跟2.1小节和3.5小节定义一致。只有遵循上述定义才能使用后面的转换公式。

欧拉角转方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_b^R = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

欧拉角转四元数

$$q_b^R = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

方向余弦矩阵转欧拉角

方向余弦矩阵 $\mathbf{C}_b^R$ 的第 i 行第 j 列的元素记作 c_{ij} ， $1 \leq i, j \leq 3$ 。首先计算俯仰角 θ

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}} \quad (\text{A.3})$$

θ 的取值范围为 $|\theta| \leq \pi/2$ 。

当 $|\theta| \neq \pi/2$ （实际计算时以 $|c_{31}| < 0.999$ 判断），则 ϕ 和 ψ 计算如下：

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}} \quad (\text{A.4})$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}} \quad (\text{A.5})$$

当 $|c_{31}| \geq 0.999$ 时, 只能计算 ϕ 和 ψ 的组合

$$\begin{cases} \psi - \phi = \tan^{-1} \frac{c_{23} - c_{12}}{c_{13} + c_{22}} & : c_{31} \leq -0.999, \\ \psi + \phi = \pi + \tan^{-1} \frac{c_{23} + c_{12}}{c_{13} - c_{22}} & : c_{31} \geq 0.999. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

方向余弦矩阵转四元数

首先做如下计算:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 + \text{tr}(\mathbf{C}_b^R), & P_2 &= 1 + 2c_{11} - \text{tr}(\mathbf{C}_b^R), \\ P_3 &= 1 + 2c_{22} - \text{tr}(\mathbf{C}_b^R), & P_4 &= 1 + 2c_{33} - \text{tr}(\mathbf{C}_b^R) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式中, $\text{tr}(\mathbf{C}_b^R)$ 为矩阵的迹。

(1) 如果 $P_1 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$, 则

$$q_1 = 0.5\sqrt{P_1}, \quad q_2 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_1}, \quad q_4 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_1} \quad (\text{A.8})$$

(2) 如果 $P_2 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$, 则

$$q_2 = 0.5\sqrt{P_2}, \quad q_3 = \frac{c_{21} + c_{12}}{4q_2}, \quad q_4 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_2} \quad (\text{A.9})$$

(3) 如果 $P_3 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$, 则

$$q_3 = 0.5\sqrt{P_3}, \quad q_4 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{c_{12} + c_{21}}{4q_3} \quad (\text{A.10})$$

(4) 如果 $P_4 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$, 则

$$q_4 = 0.5\sqrt{P_4}, \quad q_1 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_4}, \quad q_2 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_4}, \quad q_3 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_4} \quad (\text{A.11})$$

最后, 如果算得的 $\mathbf{q}$ 的实部 $q_1 < 0$, 则让算得的 $\mathbf{q}$ 取反, 即 $\mathbf{q} = -\mathbf{q}$ 。

四元数转方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_b^R = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & 2(q_2q_4 + q_1q_3) \\ 2(q_2q_3 + q_1q_4) & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2(q_3q_4 - q_1q_2) \\ 2(q_2q_4 - q_1q_3) & 2(q_3q_4 + q_1q_2) & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

四元数转旋转矢量

计 $\mathbf{q}_b^R = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T$, 对应的等效旋转矢量 ϕ_{Rb} 计算如下:

- 如果 $q_1 \neq 0$

$$\|0.5\boldsymbol{\phi}\| = \tan^{-1} \frac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\cos\|0.5\boldsymbol{\phi}\|} = \frac{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{q_1} \quad (\text{A.13})$$

$$f \equiv \frac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} \quad (\text{A.14})$$

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.15})$$

- 如果 $q_1 = 0$

$$\boldsymbol{\phi} = \pi \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.16})$$

等效旋转矢量转方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_b^R = \mathbf{I} + \frac{\sin\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|} (\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{1 - \cos\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2} (\boldsymbol{\phi} \times) (\boldsymbol{\phi} \times) \quad (\text{A.17})$$

$$(\boldsymbol{\phi} \times) \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

等效旋转矢量转四元数

$$\mathbf{q}_b^R = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\boldsymbol{\phi}\| \\ \frac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\|0.5\boldsymbol{\phi}\|} 0.5\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

参考文献

- [1] 严恭敏, 翁浚, 捷联惯导算法与组合导航原理. 西北工业大学出版社, 2019.
- [2] 袁信, 郑锴, 捷联式惯性导航原理. 航空专业教材编审组, 1985.
- [3] Savage, P.G., *Strapdown analytics, Part I*. Maple Plain, MN: Strapdown Associates, 2000.
- [4] Pio R.L., *Euler Angle Transformations*, IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 11(4): 707-715.
- [5] Longuski, J. *Solution of Euler's Equations of Motion and Eulerian Angles for nearsymmetric rigid bodies subject to constant moments*. Astrodynamics Conference. 1980. p.1642