

惯性导航原理与组合导航课程讲义

Part 7 - GNSS/INS 松组合算法设计

牛小骥、陈起金* 编

武汉大学卫星导航定位技术研究中心

2021 年 5 月



*邮箱: chengqijin@whu.edu.cn; 微信/QQ: 815577966

目 录

1	卡尔曼滤波	2
2	GNSS/INS 松组合滤波设计	3
2.1	系统状态方程	3
2.2	GNSS 位置观测方程	4
2.3	GNSS 速度观测方程	6

引 言

惯性导航是一种积分运算，其导航误差随时间积累，常需要与其他导航定位手段进行组合来解决精度发散的问题。全球导航卫星系统（GNSS）/INS 是常用的一种组合导航系统，实现了 GNSS 与 INS 两个子系统的优势互补，以提升导航系统的精度和冗余度。GNSS/INS 组合有多种具体的实现方式，如松组合、紧组合和深组合等。GNSS/INS 松组合是在位置、速度这一信息层面的组合，组合形式简单。在工程实践中最常用扩展卡尔曼滤波来实现 GNSS 和 IMU 的数据融合解算。本讲义介绍 GNSS/INS 松组合算法设计，重点在于正确构建系统状态方程和观测方程。

1 卡尔曼滤波

卡尔曼滤波算法作为一种重要的最优估计理论被广泛应用于各种领域，组合导航系统的设计是其成功应用中的一个最主要方面。卡尔曼滤波有离散型和连续型两种形式，前者可直接用于数字计算机上实现，后者更常用于卡尔曼滤波的理论性能分析。这里只介绍应用离散卡尔曼滤波算法实现 GNSS/INS 松组合解算的具体设计。

假设有离散线性系统， k 时刻的系统状态 $\mathbf{x}_k$ 受系统噪声序列 $\mathbf{w}_{k-1}$ 驱动；系统状态方程及量测方程均为系统状态量的线性方程¹：

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k/k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中，下标 $k-1$ 和 k 分别表示时刻 t_{k-1} 和 t_k ， $\mathbf{x}$ 表示状态向量 ($n \times 1$)； $\Phi_{k/k-1}$ 为 t_{k-1} 至 t_k 时刻的状态一步转移矩阵 ($n \times n$)； Γ_{k-1} 为系统噪声驱动阵 ($n \times s$)； $\mathbf{z}_k$ 为 t_k 时刻的观测向量 ($m \times 1$)； $\mathbf{H}_k$ 为观测矩阵 ($m \times n$)； $\mathbf{w}_{k-1}$ 为系统激励噪声 ($s \times 1$)， $\mathbf{v}_k$ 为量测噪声 ($m \times 1$)。要求 $\mathbf{w}_k$ 与 $\mathbf{v}_k$ 是互不相关的零均值白噪声序列，即满足

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \\ \mathbf{v}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \\ E(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3)$$

式中， $\mathbf{Q}_k$ 为系统状态噪声方差阵， $\mathbf{R}_k$ 为量测噪声方差阵。

在一个滤波周期内，卡尔曼滤波的信息更新过程可以分为时间更新过程和量测更新过程。其中时间更新又被称为预测，一步预测的状态及其协方差阵为：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad (5)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ 为 t_k 时刻的状态向量预测值， $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 为前一时刻 t_{k-1} 状态向量的最优估值。 $\mathbf{P}_{k/k-1}$ 为当前时刻 t_k 的状态最优估计的方差协方差阵的预测值， $\mathbf{P}_{k-1}$ 为前一时刻 t_{k-1} 的方差协方差阵最优估值。

在量测更新过程中首先计算增益矩阵 $\mathbf{K}$ ，然后更新系统状态 $\mathbf{x}$ 及误差协方差阵 $\mathbf{P}$ 。当 $\mathbf{Q}_k$ 非负定， $\mathbf{R}_k$ 为正定阵时， $\mathbf{x}_k$ 的最优估值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 可按下述方程求解：

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (8)$$

式 (4)~(8) 即离散型卡尔曼滤波的基本方程，只要给定初值 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和 $\mathbf{P}_0$ ，根据 t_k 时刻的量测就可递推计算任意时刻 t_k 的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 。其中 $\mathbf{P}_k$ 有多种等价的表达式，(8) 被称为 Joseph 形式，由于能够保证的对称性和正定性，在工程中应用最为广泛。虽然很多物理系统是连续系统，但只要合理离散化就能使用离散型卡尔曼滤波的基本方程。

¹ 未考虑确定性控制输入项

2 GNSS/INS 松组合滤波设计

GNSS/INS 松组合卡尔曼滤波算法设计的关键在于：建立离散时间系统误差状态模型，然后构建误差状态的线性观测方程。有了系统模型和观测方程则可直接使用卡尔曼滤波的基本方程进行组合导航解算，即完成了组合导航的算法设计。

2.1 系统状态方程

GNSS/INS 松组合常采用误差状态卡尔曼滤波（间接卡尔曼滤波）进行组合导航解算，以解决系统的非线性问题。因此，卡尔曼滤波的状态向量包含导航状态误差和传感器误差，定义为

$$\delta \mathbf{x}(t) = \left[(\delta \mathbf{r}^n)^T \quad (\delta \mathbf{v}^n)^T \quad \phi^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad \mathbf{s}_g^T \quad \mathbf{s}_a^T \right]^T \quad (9)$$

式中， $\delta \mathbf{r}^n$ 为惯导位置误差向量； $\delta \mathbf{v}^n$ 为惯导速度误差向量； ϕ 为姿态误差向量； $\mathbf{b}_g$ 为三轴陀螺零偏向量； $\mathbf{b}_a$ 为三轴加速度计零偏向量； $\mathbf{s}_g$ 为陀螺比例因子误差向量； $\mathbf{s}_a$ 为加速度计比例因子误差向量。向量 $\delta \mathbf{x}$ 中的各分量均为时间的函数，为书写方便，省略了时间变量符号 t 。式 (9) 表示将陀螺和加速度计的零偏及比例因子误差增广到卡尔曼滤波的状态量中进行估计。

为得到系统状态方程，首先需要得到 $\delta \mathbf{x}(t)$ 的连续时间微分方程，写作如下形式：

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (10)$$

对 $\delta \mathbf{x}(t)$ 向量求导即对向量的各分量分别对时间 t 求导，其中位置、速度和姿态误差微分方程已在前面推导得到，抄写如下：

$$\delta \dot{\mathbf{r}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \delta \mathbf{r}^n + \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}^n + \delta \mathbf{v}^n \quad (11)$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \delta \mathbf{f}^b + \mathbf{f}^n \times \phi - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta \mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n) + \delta \mathbf{g}_p^n \quad (12)$$

$$\dot{\phi} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \phi + \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^n \quad (13)$$

陀螺和加速度计零偏及比例因子误差均建模为一阶高斯马尔可夫过程，

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{b}}_g(t) = -\frac{1}{T_{gb}} \mathbf{b}_g(t) + \mathbf{w}_{gb}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}_a(t) = -\frac{1}{T_{ab}} \mathbf{b}_a(t) + \mathbf{w}_{ab}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}_g(t) = -\frac{1}{T_{gs}} \mathbf{s}_g(t) + \mathbf{w}_{gs}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}_a(t) = -\frac{1}{T_{as}} \mathbf{s}_a(t) + \mathbf{w}_{as}(t) \end{cases} \quad (14)$$

式中 T_{gb} 、 T_{ab} 、 T_{gs} 和 T_{as} 为一阶高斯马尔可夫过程的相关时间， $\mathbf{w}_{gb}(t)$ 、 $\mathbf{w}_{ab}(t)$ 、 $\mathbf{w}_{gs}(t)$ 和 $\mathbf{w}_{as}(t)$ 为一阶高斯马尔可夫过程的驱动白噪声。²将式 (11)~(13) 的展开式和式 (14) 代入式 (10)，可得 $\mathbf{F}(t)$ 矩阵（见附录）。

根据 $\delta \dot{\mathbf{x}}(t)$ 的表达式，容易写出³连续时间系统噪声向量 $\mathbf{w}(t)$ 和矩阵 $\mathbf{G}(t)$ 。

$$\mathbf{w} = \left[\mathbf{w}_v^T \quad \mathbf{w}_\phi^T \quad \mathbf{w}_{gb}^T \quad \mathbf{w}_{ab}^T \quad \mathbf{w}_{gs}^T \quad \mathbf{w}_{as}^T \right]^T \quad (15)$$

²注意，传感器误差并非一定要建模为一阶高斯马尔可夫过程，实际应用中也会有人将其建模为随机游走，甚至随机常数。例如，当建模为随机常数时，模型为 $\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{0}$ ，此时不需要设置相应的系统噪声分量。

³注意，系统噪声不能随意加入，而应该根据系统状态方程的推导式确定。例如位置误差微分方程中没有包含传感器误差，则一般情况下不应该在位置误差分量上加上系统噪声

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{q}(t)\delta(t - \tau) \quad (16)$$

其中 $\mathbf{w}_v$ 和 $\mathbf{w}_\phi$ 分别为加速度计和陀螺的测量白噪声⁴, $\mathbf{w}_{gb}(t)$ 、 $\mathbf{w}_{ab}(t)$ 、 $\mathbf{w}_{gs}(t)$ 和 $\mathbf{w}_{as}(t)$ 为陀螺和加速度计零偏及比例因子误差建模的驱动白噪声。矩阵 $\mathbf{G}(t)$ 和 $\mathbf{q}(t)$ 展开式见附录。为方便使用离散时间卡尔曼滤波的基本方程, 需要对式 (10) 进行离散化处理, 包括推导离散时间的状态一步转移矩阵 $\Phi_{k/k-1}$ 和驱动白噪声的等效离散化 (得到 $\mathbf{w}_k$)。离散化后的系统状态方程写作

$$\delta\mathbf{x}_k = \Phi_{k/k-1}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (17)$$

式中,

$$\Phi_{k/k-1} = \exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t)dt\right) \quad (18)$$

$$\mathbf{w}_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{k/t} \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) dt \quad (19)$$

记离散化时间间隔 $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, 当 $\mathbf{F}(t)$ 在较短的积分区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 内变化不太剧烈时, 且设 $\mathbf{F}(t_{k-1})\Delta t \ll \mathbf{I}$, 则一步转移矩阵式 (18) 可近似为:

$$\Phi_{k/k-1} = \exp\{\mathbf{F}(t_{k-1})\Delta t\} \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}(t_{k-1})\Delta t \quad (20)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为 3×3 的单位矩阵。式 (19) 表明 $\mathbf{w}_{k-1}$ 是关于高斯白噪声 $\mathbf{w}(t)$ 的线性变换, 其结果仍然是正态分布的随机向量函数。容易证明

$$E[\mathbf{w}_{k-1}] = \mathbf{0} \quad (21)$$

$\mathbf{w}_{k-1}$ 的二阶矩 $\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}^T]$, 如下计算

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= E\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{k/t} \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) dt \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{k/\tau} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau\right]^T\right\} \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{k/t} \mathbf{G}(t) \mathbf{q}(t) \mathbf{G}^T(t) \Phi_{k/t}^T dt \end{aligned} \quad (22)$$

同样, 当 $\mathbf{G}(t)$ 在较短的积分区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 内变化不太剧烈时, $\mathbf{Q}_k$ 可简化为梯形积分。

$$\mathbf{Q}_k \approx \frac{1}{2} [\Phi_{k/k-1} \mathbf{G}(t_{k-1}) \mathbf{q}(t_{k-1}) \mathbf{G}^T(t_{k-1}) \Phi_{k/k-1}^T + \mathbf{G}(t_k) \mathbf{q}(t_k) \mathbf{G}^T(t_k)] \Delta t \quad (23)$$

从上述推导可知 $\mathbf{w}_k$ 为白噪声序列, (17) 描述的等效离散系统满足离散型卡尔曼滤波的基本方程要求。

2.2 GNSS 位置观测方程

GNSS 定位解算给出的是天线相位中心 (或其它参考点) 的位置坐标, INS 机械编排给出的是 IMU 测量中心的导航结果, 二者在物理上不重合 (如图 1 所示), 因此在数据融合解算时需进行杆臂效应改正。GNSS 天线相位中心与 IMU 测量中心之间的位置转换关系式为:

$$\mathbf{r}_G^n = \mathbf{r}_I^n + \mathbf{D}_R^{-1} \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \quad (24)$$

⁴ 此处是一个三维向量, 代表三个轴的加速度计测量白噪声, 其它符号类同。

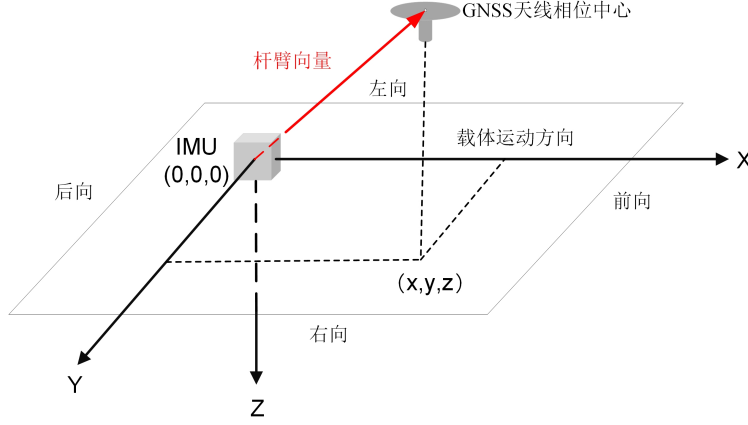


图 1: GNSS 杆臂示意图

$$\mathbf{D}_R^{-1} = \text{diag} \left(\left[\frac{1}{R_M + h} \quad \frac{1}{(R_N + h) \cos \varphi} \quad -1 \right]^T \right) \quad (25)$$

式 (24) 中 $\mathbf{r}_G$ 表示 GNSS 天线相位中心的实际位置, $\mathbf{r}_I$ 表示 IMU 测量中心的实际位置, 均用纬度 φ 、经度 λ 和高程 h 的大地坐标表示。 $\mathbf{l}^b$ 为 GNSS 天线的杆臂向量, 即 IMU 测量中心指向 GNSS 天线相位中心的向量在 b 系下的投影 (如图 1 所示)。 $\mathbf{l}^b$ 可以通过精密测量手段进行测量标定, 一般认为其误差可以忽略。

在实际导航应用中, 考虑各导航状态的误差, 式 (24) 可写作

$$\hat{\mathbf{r}}_G^n = \hat{\mathbf{r}}_I^n + \mathbf{D}_R^{-1} \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}^b \quad (26)$$

式中带上标 $\hat{\cdot}$ 的变量表示带有误差的计算值。 $\hat{\mathbf{r}}_I$ 为惯导解算的 IMU 中心位置向量, $\hat{\mathbf{r}}_G$ 为惯导推算的 GNSS 天线相位中心的位置向量, $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ 为惯导解算的姿态矩阵。在上式扰动分析时忽略了位置误差对矩阵 $\mathbf{D}_R^{-1}$ 的影响, 因为其影响非常小。回顾误差扰动分析, 将姿态误差的定义式重写如下⁵

$$\hat{\mathbf{C}}_b^n = [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_I^n = \mathbf{r}_I^n + \mathbf{D}_R^{-1} \delta \mathbf{r}^n \quad (28)$$

将式 (24)、(27) 和 (28) 代入式 (26), 整理可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_G^n &= \mathbf{r}_I^n + \mathbf{D}_R^{-1} \delta \mathbf{r}^n + \mathbf{D}_R^{-1} [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \\ &= \mathbf{r}_G^n + \mathbf{D}_R^{-1} \delta \mathbf{r}^n + \mathbf{D}_R^{-1} [(\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b) \times \boldsymbol{\phi}] \end{aligned} \quad (29)$$

GNSS 定位解算得到的 GNSS 天线相位中心的位置表示为:

$$\tilde{\mathbf{r}}_G^n = \mathbf{r}_G^n - \mathbf{D}_R^{-1} \mathbf{n}_r \quad (30)$$

式中, 上标 $\sim$ 表示为观测值, $\tilde{\mathbf{r}}_G^n$ 为 GNSS 位置观测量, $\mathbf{n}_r$ 为 GNSS 的位置误差⁶。一般地, 为简化处理常将 GNSS 位置测量值的误差建模为高斯白噪声序列, 即 $\mathbf{n}_{r,k} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$, $\mathbf{R}_k = E[\mathbf{n}_{r,k} \mathbf{n}_{r,k}^T]$ 。

⁵注意, 惯导位置误差式中矩阵 $\mathbf{D}_R^{-1}$ 的作用是将 n 系下的北向、东向和垂向位置差异 (单位 m) 转化为纬度、经度和高程分量的差异。

⁶式中, 观测噪声 $\mathbf{n}$ 前面的符号取负只是为了使得后面观测方程中观测噪声符号为正。其实此处也可以取正号, 因为在使用卡尔曼滤波解算时, 只需要噪声的方程阵。

观测误差的方差 $\mathbf{R}_k$ 一般可从 GNSS 定位解算程序/软件中得到。

因此，对应的观测向量表示为 INS 推算的位置与 GNSS 位置观测之差，易得

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z}_r &= \mathbf{D}_R (\hat{\mathbf{r}}_G^n - \tilde{\mathbf{r}}_G^n) \\ &\approx \delta \mathbf{r}^n + (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b) \times \boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}_r\end{aligned}\quad (31)$$

因此，GNSS 位置观测方程可写作如下形式

$$\delta \mathbf{z}_r = \mathbf{H}_r \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_r \quad (32)$$

式中

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \times) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

实际解算时，观测矩阵 $\mathbf{H}_r$ 中的 $\mathbf{C}_b^n$ 用最新时刻的惯导姿态 $\hat{\mathbf{C}}_b^n$ 进行赋值。

2.3 GNSS 速度观测方程

GNSS 利用多普勒观测值可以解算出天线相位中心处的三维速度观测值 $\mathbf{v}_G^n$ 。IMU 中心与 GNSS 天线相位中心之间的速度转换关系为：

$$\mathbf{v}_G^n = \mathbf{v}_I^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \quad (34)$$

式中， $\mathbf{v}_I^n$ 和 $\mathbf{v}_G^n$ 分别表示 IMU 中心和 GNSS 天线相位中心的实际速度向量， $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 表示 n 系相对于 i 系的转动角速度向量在 n 系下的投影， $(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times)$ 表示向量 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 对应的反对称矩阵； $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 为陀螺理论输出角速度向量。对于普通运动场景，只要速度和杆臂不是特别大，等式右边第二项 $(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b$ 的幅值很小，很多情况下都可直接忽略⁷。在实际导航应用中，式 (34) 可写作

$$\hat{\mathbf{v}}_G^n = \hat{\mathbf{v}}_I^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}^b - \hat{\mathbf{C}}_b^n (\mathbf{l}^b \times \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b) \quad (35)$$

回顾惯导速度误差和陀螺角速度测量误差的定义

$$\hat{\mathbf{v}}_I^n = \mathbf{v}_I^n + \delta \mathbf{v}^n \quad (36)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \quad (37)$$

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{b}_g + \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \mathbf{s}_g + \mathbf{w}_\phi \quad (38)$$

式中， $\mathbf{b}_g$ 为陀螺零偏， $\mathbf{s}_g = [s_{g,x}, s_{g,y}, s_{g,z}]^T$ 为陀螺比例因子误差向量， $\mathbf{w}_\phi$ 为陀螺测量白噪声。将式 (27)、(36) 和 (37) 代入式 (35)，省略关于误差的二阶项，整理可得

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}_G^n &= \mathbf{v}_I^n + \delta \mathbf{v}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b - [\mathbf{I} - (\boldsymbol{\phi} \times)] \mathbf{C}_b^n [\mathbf{l}^b \times (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b)] \\ &\approx \mathbf{v}_G^n + \delta \mathbf{v}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) (\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \times) \boldsymbol{\phi} - [\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b)] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b\end{aligned}\quad (39)$$

GNSS 解算的天线相位中心速度（GNSS 速度观测值）为：

$$\tilde{\mathbf{v}}_G^n = \mathbf{v}_G^n - \mathbf{n}_v \quad (40)$$

⁷为了推导的完备性，本讲义仍保留了此项，但忽略角速度向量 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ 误差的影响。

速度观测向量可表示为 INS 推算的速度与 GNSS 解算的速度之差：

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{z}_v &= \hat{\mathbf{v}}_G^n - \tilde{\mathbf{v}}_G^n \\ &= \delta \mathbf{v}^n - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times)(\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \times) \boldsymbol{\phi} - [\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b)] \times \boldsymbol{\phi} - \mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times) \delta \boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \mathbf{n}_v\end{aligned}\quad (41)$$

因此，GNSS 速度观测方程可写作如下形式

$$\delta \mathbf{z}_v = \mathbf{H}_v \delta \mathbf{x} + \mathbf{n}_v \quad (42)$$

将式 (38) 代入式 (41)，容易写出相应的观测矩阵 $\mathbf{H}_v$

$$\mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{H}_{v3} & -(\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \times) & \mathbf{0}_3 & \mathbf{H}_{v6} & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{v3} = -(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times)(\mathbf{C}_b^n \mathbf{l}^b \times) - [\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times] \\ \mathbf{H}_{v6} = -\mathbf{C}_b^n (\mathbf{l}^b \times) \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \end{cases} \quad (44)$$

附录

F 矩阵展开式

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{rr} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{vr} & \mathbf{F}_{vv} & [(\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b) \times] & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \text{diag}(\mathbf{f}^b) \\ \mathbf{F}_{\phi r} & \mathbf{F}_{\phi v} & -(\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^n \text{diag}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{T_{gb}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{T_{ab}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{T_{gs}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{T_{as}} \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (45)$$

式中 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 为 3×3 的单位矩阵。

$$\mathbf{F}_{rr} = \begin{bmatrix} -\frac{v_D}{R_M + h} & 0 & \frac{v_N}{R_M + h} \\ \frac{v_E \tan \varphi}{R_N + h} & -\frac{v_D + v_N \tan \varphi}{R_N + h} & \frac{v_E}{R_N + h} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{F}_{vr} = \begin{bmatrix} \frac{-2v_E \omega_e \cos \varphi}{R_M + h} - \frac{v_E^2 \sec^2 \varphi}{(R_M + h)(R_N + h)} & 0 & \frac{v_N v_D}{(R_M + h)^2} - \frac{v_E^2 \tan \varphi}{(R_N + h)^2} \\ \frac{2\omega_e(v_N \cos \varphi - v_D \sin \varphi)}{R_M + h} + \frac{v_N v_E \sec^2 \varphi}{(R_M + h)(R_N + h)} & 0 & \frac{v_E v_D + v_N v_E \tan \varphi}{(R_N + h)^2} \\ \frac{2\omega_e v_E \sin \varphi}{R_M + h} & 0 & -\frac{v_E^2}{(R_N + h)^2} - \frac{v_N^2}{(R_M + h)^2} + \frac{2g_p}{\sqrt{R_M R_N + h}} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{F}_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R_M + h} & -2\left(\omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{R_N + h}\right) & \frac{v_N}{R_M + h} \\ 2\omega_e \sin \varphi + \frac{v_E \tan \varphi}{R_N + h} & \frac{v_D + v_N \tan \varphi}{R_N + h} & 2\omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{R_N + h} \\ -\frac{2v_N}{R_M + h} & -2\left(\omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{R_N + h}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{F}_{\phi r} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_e \sin \varphi}{R_M + h} & 0 & \frac{v_E}{(R_N + h)^2} \\ 0 & 0 & -\frac{v_N}{(R_M + h)^2} \\ -\frac{\omega_e \cos \varphi}{R_M + h} - \frac{v_E \sec^2 \varphi}{(R_M + h)(R_N + h)} & 0 & -\frac{v_E \tan \varphi}{(R_N + h)^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\phi v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_N + h} & 0 \\ -\frac{1}{R_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan \varphi}{R_N + h} & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

q 矩阵

连续时间系统噪声方差阵 $\mathbf{q}(t)$ （也称功率谱密度矩阵），虽然写成时间 t 的函数，一般情况下是常值矩阵，由 IMU 的传感器误差模型参数决定。特别注意，不要混淆了矩阵 $\mathbf{q}(t)$ 与对应的等效离散化白噪声的方差阵 $\mathbf{Q}_k$ 。不考虑各轴陀螺和各轴加速度计之间的区别（即认为三轴陀螺误差模型相同，三

轴加速度计的误差模型也相同), 则有

$$\mathbf{q}_{18 \times 18}(t) = \begin{bmatrix} \text{VRW}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{ARW}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2\sigma_{gb}^2}{T_{gb}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2\sigma_{ab}^2}{T_{ab}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2\sigma_{gs}^2}{T_{gs}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2\sigma_{as}^2}{T_{as}} \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (50)$$

G 矩阵

$$\mathbf{G}_{21 \times 18} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (51)$$